Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 11

(Lösungen)

1. Beweisen Sie den Kongruenzsatz WSW.

Lösung siehe: http://wikis.zum.de/geowiki/index.php/Der_fotografierte_Beweis

2. Beweisen Sie folgenden Satz:

   Gegeben sei ein (nicht gestreckter) Winkel $\angle AOB$, es sei $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ und $P \in \overline{AB}$. Dann ist OP^+ genau dann Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$, wenn P Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist.

Beweis:

Es sind 2 Richtungen zu beweisen.

($\Rightarrow$) Wenn OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ ist, so ist P Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

- Die Dreiecke ΔAOP und ΔBOP sind nach Axiom IV/5 kongruent:
  - Da OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ ist, gilt definitionsgemäß $\angle AOP \equiv \angle BOP$;
  - $|OP| = |OP|$;
  - $|OA| = |OB|$ (nach Voraussetzung).
- Somit gilt $|AP| = |BP|$ und wegen $P \in \overline{AB}$ ist P daher Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

($\Leftarrow$) Wenn P Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist, so ist OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$.

- Falls OP^+ nicht Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ wäre, so müsste nach dem Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden eine andere Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ existieren. Diese müsste nach Lemma 1 die Strecke $\overline{AB}$ in einem Punkt schneiden, der mit S bezeichnet sei.
- Nach dem bereits bewiesenen Teil ($\Rightarrow$) folgt daraus, dass S Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist.
- Nach einem in Übungsserie 5 bewiesenen Satz besitzt jede Strecke *genau* einen Mittelpunkt.
- Somit gilt $S = P$ und daher ist OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$.

Alternativ kann dieser Teil auch über den Kongruenzsatz sss bewiesen werden!