

Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 11

(Lösungen)

1. Beweisen Sie, dass jeder Winkel genau eine Winkelhalbierende besitzt.

Lösung:

Existenz der Winkelhalbierenden:

Gegeben sei ein beliebiger Winkel $\angle ASB$. Es ist zu zeigen, dass es einen Strahl SP^+ derart gibt, dass gilt

$$|\angle SA^+SP^+| + |\angle SP^+SB^+| = |\angle ASB| \text{ und} \\ |\angle SA^+SP^+| = |\angle SP^+SB^+|.$$

Nach Axiom IV/1 ist $|\angle ASB|$ eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Demzufolge ist $\frac{|\angle ASB|}{2}$ ebenfalls eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Axiom IV/2 liefert uns in der Halbebene SAB^+ einen Strahl SP^+ derart, dass $|\angle SA^+SP^+| = \frac{|\angle ASB|}{2}$ gilt.

Wenn wir zeigen könnten, dass der Punkt P im Inneren des Winkels $\angle ASB$ liegt, wären wir im Prinzip fertig.

Jetzt würde nämlich nach Axiom IV/3 $|\angle SA^+SP^+| + |\angle SP^+SB^+| = |\angle ASB|$

folgen. Unter Berücksichtigung von $|\angle SA^+SP^+| = \frac{|\angle ASB|}{2}$ wäre dann auch

$$|\angle SP^+SB^+| = \frac{|\angle ASB|}{2} \text{ und somit } |\angle SA^+SP^+| = |\angle SP^+SB^+|.$$

Um zu zeigen, dass P ein Punkt aus dem Inneren von $\angle ASB$ ist, nehmen wir an, dass P nicht im Inneren von $\angle ASB$ liegt. In diesem Fall wäre der Punkt B ein Punkt im Inneren von Winkel $\angle ASP$. Nach Satz IV/1 müsste jetzt $|\angle ASB| < |\angle ASP|$ sein. Das ist jedoch ein Widerspruch zu

$$|\angle ASP| = \frac{|\angle ASB|}{2} < |\angle ASB|.$$

Die Annahme P ist nicht ein Punkt im Inneren von $\angle ASB$ ist also zu verwerfen.

Die Existenz einer Winkelhalbierenden zu einem beliebigen Winkel ist damit gezeigt.

Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden:

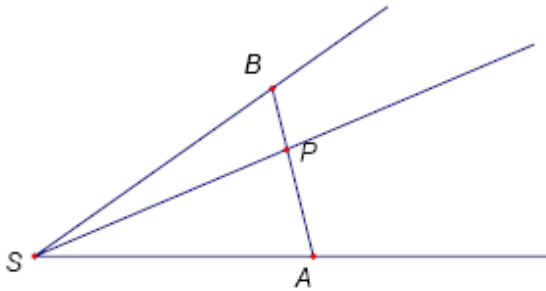
Wir nehmen an, ein Winkel $\angle pq$ hätte zwei verschiedene Winkelhalbierende h_1 und h_2 . Die Winkel $\angle ph_1$ und $\angle ph_2$ hätten dann dasselbe Maß, nämlich $\frac{\angle pq}{2}$. Nach Axiom IV/2 können

jetzt die beiden Strahlen h_1 und h_2 nicht verschieden sein. Unsere Annahme ist zu verwerfen.

2. Gegeben seien drei nicht kollineare Punkte A , B und S . Beweisen Sie: Wenn P ein Punkt der offenen Strecke \overline{AB} ist, dann liegt der Strahl SP^+ vollständig im Inneren des Winkels $\sphericalangle ASB$.

Beweis:

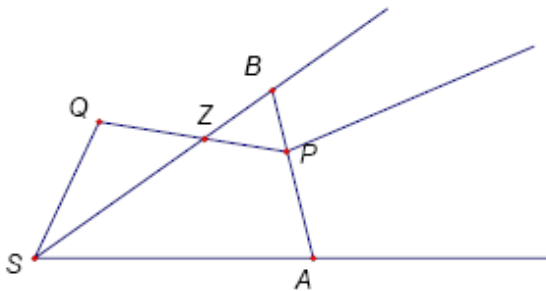
Es sei P also ein Punkt der offenen Strecke \overline{AB} . Der Punkt S ist der Scheitel des Winkels $\sphericalangle ASB$:



P ist ein Punkt des Inneren von $\sphericalangle ASB$ (Konvexität des Inneren eines Winkels).

Wir haben zu zeigen, dass der Strahl SP^+ vollständig im Inneren von $\sphericalangle ASB$ liegt.

Hierzu nehmen wir an, dass es auf dem Strahl SP^+ einen Punkt Q gibt, der nicht im Inneren von $\sphericalangle ASB$ liegt:



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gehen wir davon aus, dass Q in der Halbebene SBA^+ liegt². Weil P und Q jetzt bezüglich der Geraden SB in verschiedenen Halbebenen liegen, wird die Strecke \overline{QP} durch die Gerade SB in einem Punkt geschnitten, den wir Z nennen wollen (Man erinnere sich daran, wie Halbebenen definiert sind.) Jetzt gilt Folgendes:

1. Die Geraden SB und SP gehen beide selbstverständlich durch den Punkt S .
2. Z ist ein Punkt sowohl der Geraden SP als auch der Geraden SB .

Nach den Inzidenzaxiomen geht durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade. Wegen 1. und 2. sind die Geraden SB und SP somit identisch.

Der Punkt P ist also ein Punkt der Geraden SB . Er liegt als Punkt der offenen Strecke \overline{AB} aber auch auf der Geraden AB . Letztere ist von der Geraden SB verschieden. Wäre sie es nicht, würden nach den Inzidenzaxiomen die beiden durch die Schenkel des Winkels bestimmten Geraden zusammenfallen, was ein Widerspruch dazu wäre, dass die Punkte A , B , S nicht kollinear sind.

Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam. Für die beiden Geraden AB und SB ist dieses der Punkt B . Da nach unseren bisherigen Überlegungen auch der Punkt P ein Schnittpunkt der Geraden AB und SB ist, müssen die beiden Punkte P und B zusammenfallen. Das ist allerdings ein Widerspruch dazu, dass P ein Punkt der offenen Strecke \overline{AB} ist.

Die Annahme, dass es auf SP^+ einen Punkt geben könnte, der nicht im Inneren von $\sphericalangle ASB$ liegt, ist somit zu verwerfen. Also liegt der gesamte Strahl SP^+ im Inneren von $\sphericalangle ASB$.