

Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 5

(Lösungen)

1. Aufgabe:

Satz: Gegeben sei ein Dreieck $\overline{ABC}$ in einer Ebene E und eine Gerade g in dieser Ebene, die keine der drei Punkte A , B und C enthält.

Wenn g die Strecke $\overline{BC}$ schneidet, so schneidet sie auch entweder die Strecke $\overline{AB}$ oder die Strecke $\overline{AC}$.

a) Wie lautet die Kontraposition dieser Implikation?

b) Wie lautet die Annahme, wenn Sie diese Implikation durch einen Widerspruch beweisen möchten?

a) Vor: Die Gerade g schneidet die Strecke $\overline{BC}$

Beh: Die Gerade g schneidet entweder die Strecke $\overline{AB}$ oder die Strecke $\overline{AC}$

Kontraposition: Wenn die Gerade g die beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ schneidet oder beide Strecken nicht schneidet, dann schneidet g auch nicht die Strecke $\overline{BC}$

(Etwas informell ausgedrückt: Die Negation von "entweder oder" ist "ganz oder gar nicht")

b) Annahme: Die Gerade g schneidet die beiden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ oder g schneidet beide Strecken nicht.

2. Aufgabe:

Gegeben sei folgende Äquivalenz: Der Abstand zweier Punkte A und B ist genau dann 0, wenn A und B identisch sind.

a) Formulieren Sie die beiden Implikationen, die in dieser Aussage stecken.

b) Wie lautet jeweils die Kontraposition der beiden Implikationen?

c) Wie lauten die beiden Annahmen, wenn Sie diese Implikationen jeweils durch einen Widerspruch beweisen möchten?

a) Vor: Der Abstand zweier Punkte ist 0

Beh: Die Punkte A und B sind identisch

1. Implikation: Wenn der Abstand zweier Punkte A und B null ist, dann sind die Punkte A und B identisch.

Vor: Die Punkte A und B sind identisch

Beh: Der Abstand der Punkte A und B ist 0.

2. Implikation: Wenn die Punkte A und B identisch sind, dann ist der Abstand der Punkte A und B 0.

b) Kontraposition 1: Wenn die Punkte A und B nicht identisch sind, dann ist der Abstand der Punkte A und B nicht 0.

Kontraposition 2: Wenn der Abstand der Punkte A und B nicht 0 ist, dann sind die Punkte A und B nicht identisch.

c) Annahme 1: Die Punkte A und B sind nicht identisch.

Annahme 2: Der Abstand der Punkte A und B ist nicht 0.

3. Aufgabe: Wir betrachten eine Gerade g und auf dieser Geraden die Relation Punkt A liegt links von Punkt B ohne exakte Definition in intuitiver Form. Welche der folgenden Eigenschaften trifft auf diese Relation zu?

- (a) Für jeden Punkt A von g gilt: A liegt links von sich selbst.
- (b) Für je zwei Punkte A und B der Geraden g gilt: Wenn A links von B liegt, dann liegt B auch links von A .
- (c) Für je drei Punkte A , B und C der Geraden g gilt: Wenn A links von B und B links von C liegt, dann liegt A auch links von C .
- (d) Für alle Punkte der Geraden g gilt: Es existiert kein Punkt, der links neben sich selbst liegt.
- (e) Für je zwei Punkte A und B der Geraden g gilt: entweder liegt A links von B oder B liegt links von A oder die beiden Punkte A und B sind identisch.

Lösung: Wir betrachten die Wahrheitswerte der Aussagen.

- (a) Die Aussage ist falsch. Die Relation ist also nicht reflexiv.
- (b) Die Aussage ist falsch. Die Relation ist also nicht symmetrisch.
- (c) Die Aussage ist wahr. Die Relation ist also transitiv.
- (d) Die Aussage ist wahr.
- (e) Die Aussage ist wahr.