

6 Wichtige Sätze der absoluten Geometrie

6.1 Absolute Geometrie?

Unter absoluter Geometrie versteht man eine Geometrie, die nur auf den bisher behandelten Axiomen beruht, d.h. eine Geometrie die auf den folgenden Axiomengruppen aufbaut:

- (I) Axiome der Inzidenz
- (II) Axiome des Abstandes
- (III) Axiome der Anordnung
- (IV) Axiome der Winkelmessung
- (V) Dreieckskongruenzaxiom SWS

In der absoluten Geometrie sind u.a. die folgenden für die Schulgeometrie wichtigen Sätze beweisbar:

1. Schwacher Außenwinkelsatz
2. Basiswinkelsatz und Umkehrung
3. Mittelsenkrechtenkriterium
4. Seiten-Winkel-Beziehungen im Dreieck (Dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber und umgekehrt.)
5. Existenz und Eindeutigkeit des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade (Existenz wurde schon gezeigt, Eindeutigkeit steht noch aus.)
6. Winkelhalbierendenkriterium
7. Umkehrung von Stufen- und Wechselwinkelsatz (Wenn Stufenwinkel bzw. Wechselwinkel kongruent dann Parallelität.)
8. Existenz paralleler Geraden.

Nicht beweisbar sind in der absoluten Geometrie die folgenden für die Schulgeometrie wichtigen Sätze:

- a) Wechselwinkelsatz, Stufenwinkelsatz (Wenn die geschnittenen geraden parallel zueinander sind, dann sind die entstehenden Stufen- bzw. Wechselwinkel kongruent zueinander.)
- b) Innenwinkelsatz für Dreiecke
- c) Starker Außenwinkelsatz
- d) Sätze über Parallelogramme (Diagonalen halbieren einander etc.)

Zum Beweis dieser und weiterer Sätze bedarf es der sogenannten Euklidischen Geometrie. Die absolute Geometrie wird zur Euklidischen Geometrie, wenn ihre Axiome um das sogenannte Euklidische Parallelenaxiom ergänzt wird.

wir werden im Folgenden die unter 1. bis 8. genannten Sätze nur mit den Mitteln der absoluten Geometrie beweisen. Beachten Sie also, dass für die Beweise der Stufen- bzw. Wechselwinkelsatz, der Innenwinkelsatz für Dreiecke (und damit für beliebige Vielecke), viele Parallelogrammeigenschaften nicht zur Verfügung stehen.

Wir werden also die bisher eingeführten Axiome und bisher bereits bewiesene Sätze verwenden. Hier zum Überblick noch einmal wichtige bereits bewiesene Sätze:

- (a) Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunktes einer Strecke
- (b) Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten in einem Punkt einer Geraden auf dieser Geraden.
- (c) Existenz und Eindeutigkeit der Mittelsenkrechten einer Strecke
- (d) Existenz und Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden eines Winkels
- (e) Das Innere eines Winkels ist konvex.
- (f) Das Innere eines Dreiecks ist konvex.
- (g) Existenz des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade.

6.2 Der schwache Außenwinkelsatz

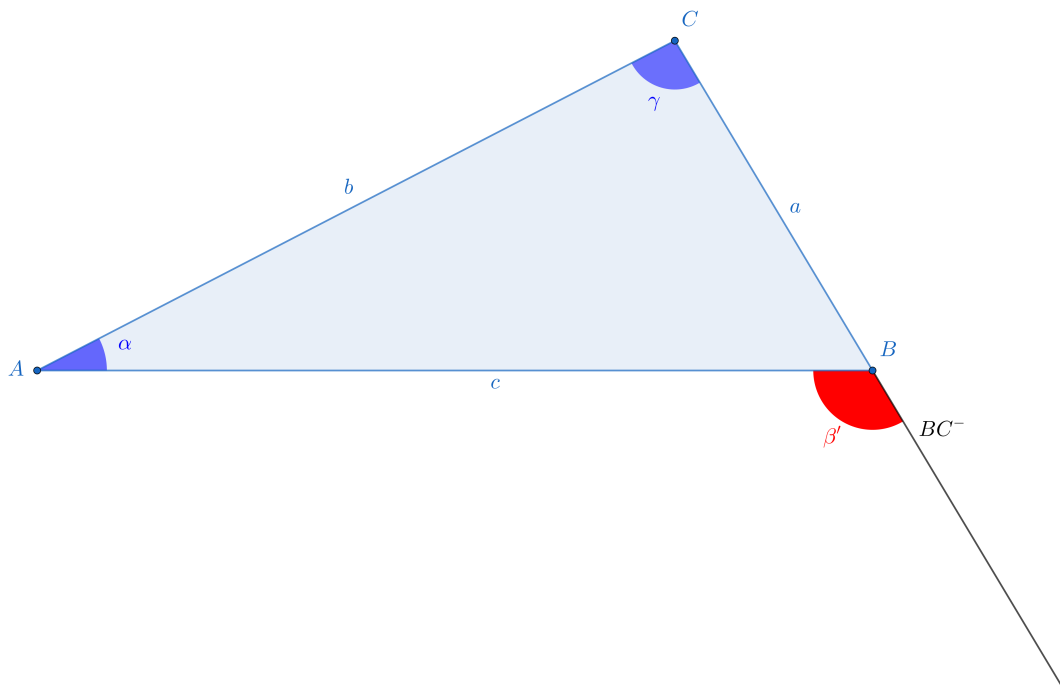
6.2.1 Der Satz

Satz 6.1

schwacher Außenwinkelsatz

Für jedes Dreieck \overline{ABC} gilt:

Jeder Außenwinkel φ von \overline{ABC} ist größer als jeder der beiden Innenwinkel von \overline{ABC} , die nicht Nebenwinkel von φ sind.



Im Fall der obigen Skizze besagt der schwache Außenwinkelsatz, dass

$$\beta' > \alpha \tag{1}$$

$$\beta' > \gamma \tag{2}$$

6.2.2 Beweis

Die Beweisidee:

α und β lassen sich nur schwer miteinander vergleichen. Deshalb konstruieren wir uns einen Winkel α_1 ,

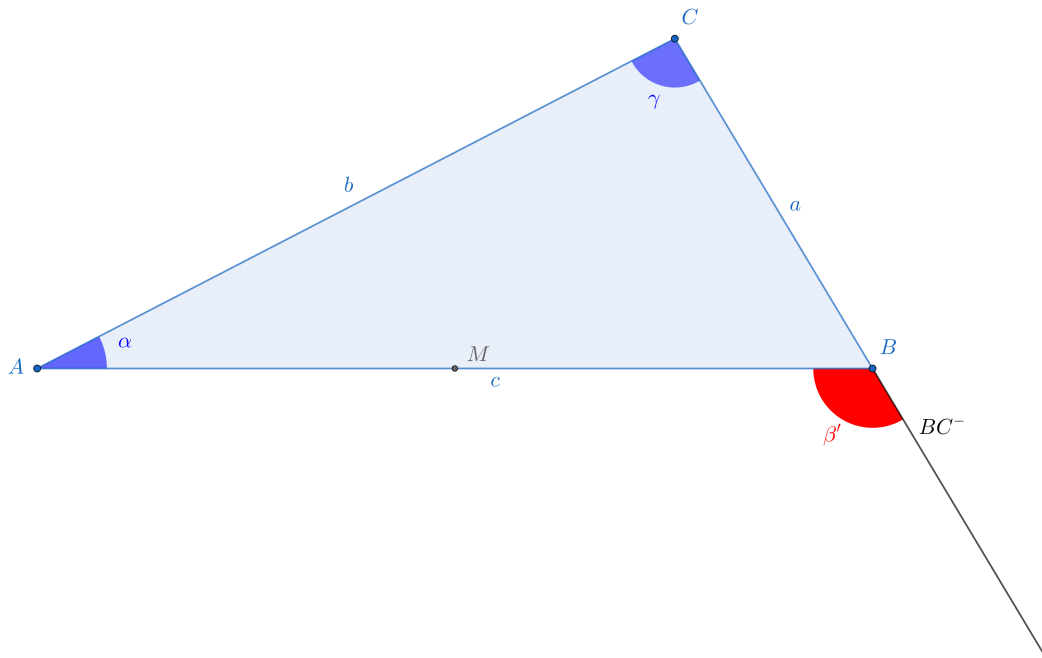
- der so groß wie α ist.
- mit β' den Schenkel BA^+ gemeinsam hat und
- dessen anderer Schenkel im Inneren von β' liegt.

α_1 wäre dann kleiner als β' und wegen $\alpha \cong \alpha_1$ wäre auch $|\alpha| < |\beta'|$.

Die Konstruktion von α_1 :

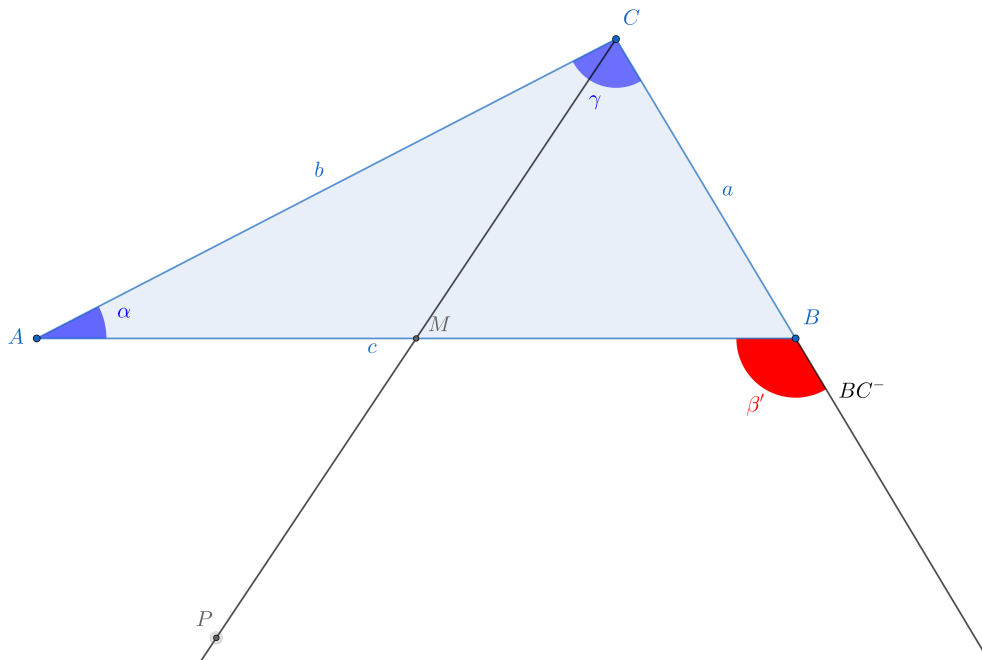
Konstruktionsschritt 1: Mittelpunkt von \overline{AB}

Nach dem Satz von der Existenz des Mittelpunktes einer jeden Strecke, können wir davon ausgehen, dass auch \overline{AB} einen Mittelpunkt M hat.



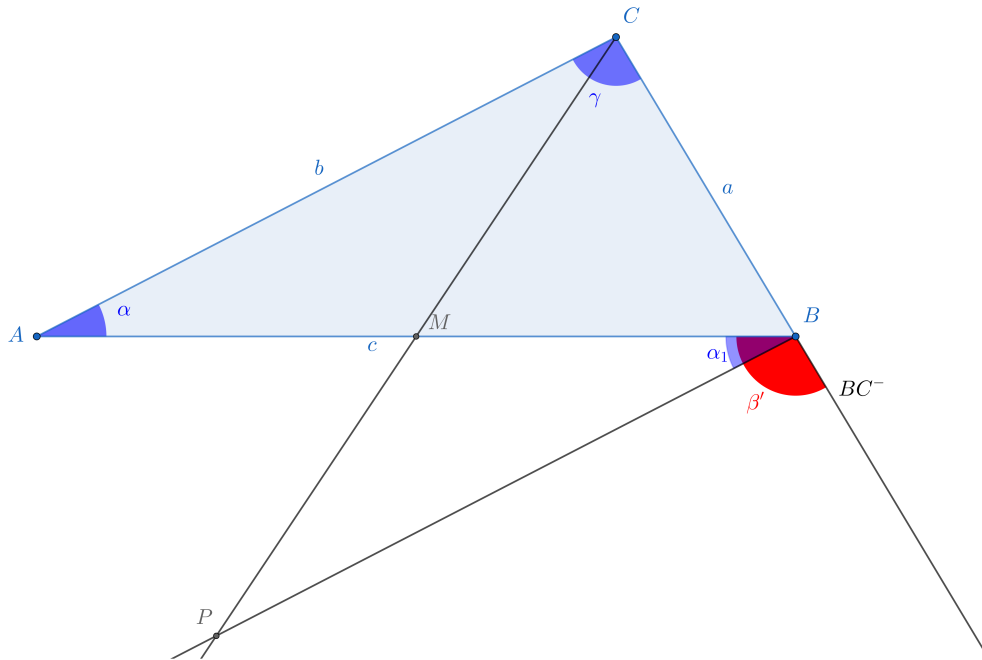
Konstruktionsschritt 2: P auf MC^- mit $\overline{MP} \cong \overline{MC}$

Nach dem Axiom vom Lineal existiert auf MC^- genau eine Punkt P mit $\overline{MP} \cong \overline{MC}$.



Konstruktionsschritt 3: Mit P erhalten wir den Winkel α_1

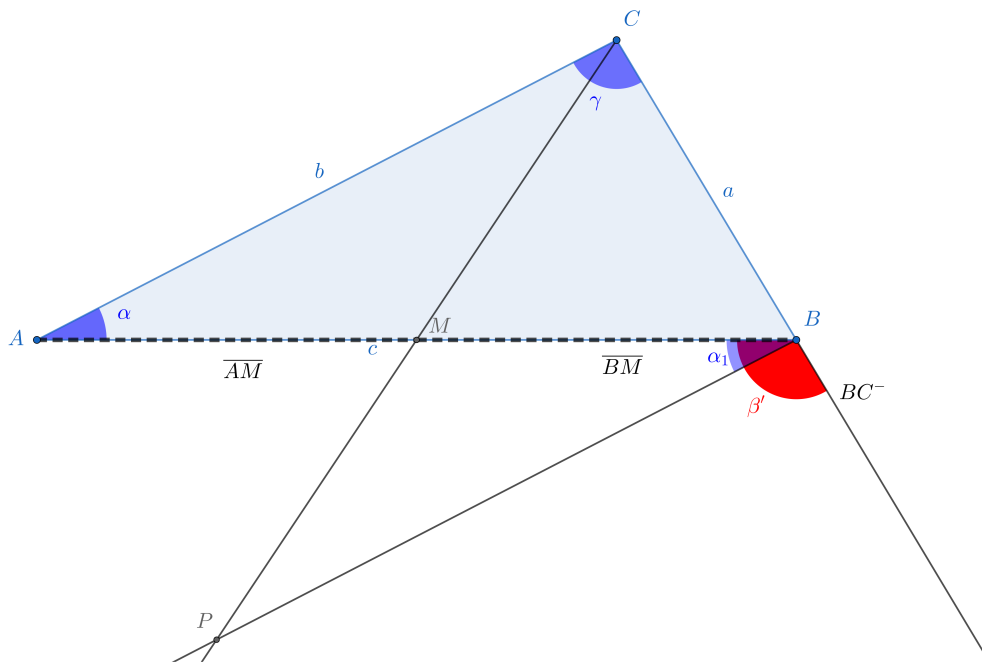
Wählen $\alpha_1 = \angle MBP$



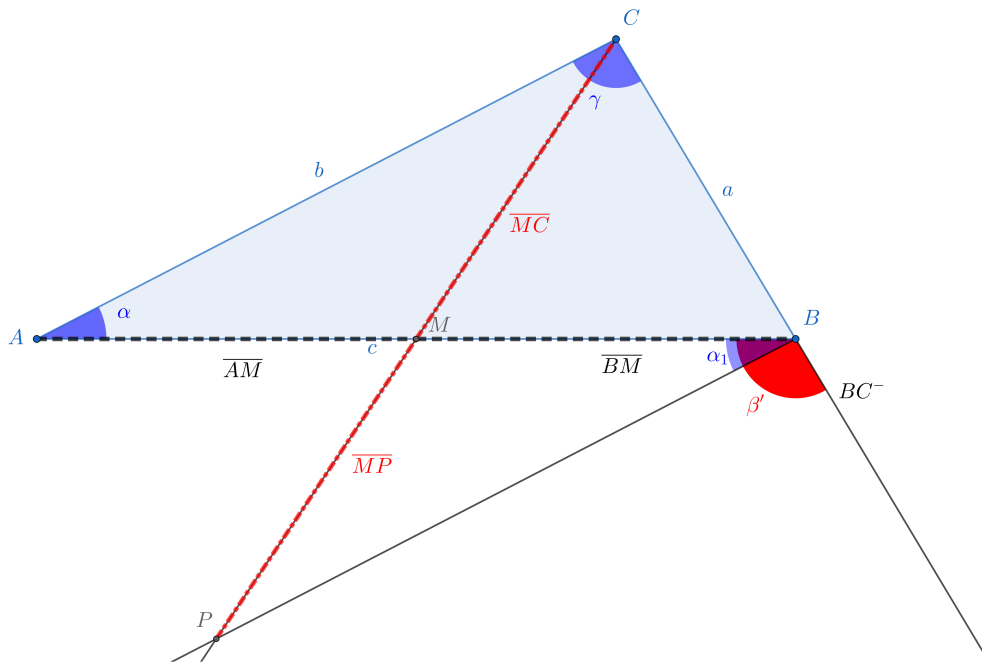
Nachweis, dass $\alpha_1 \cong \alpha$:

(I) $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

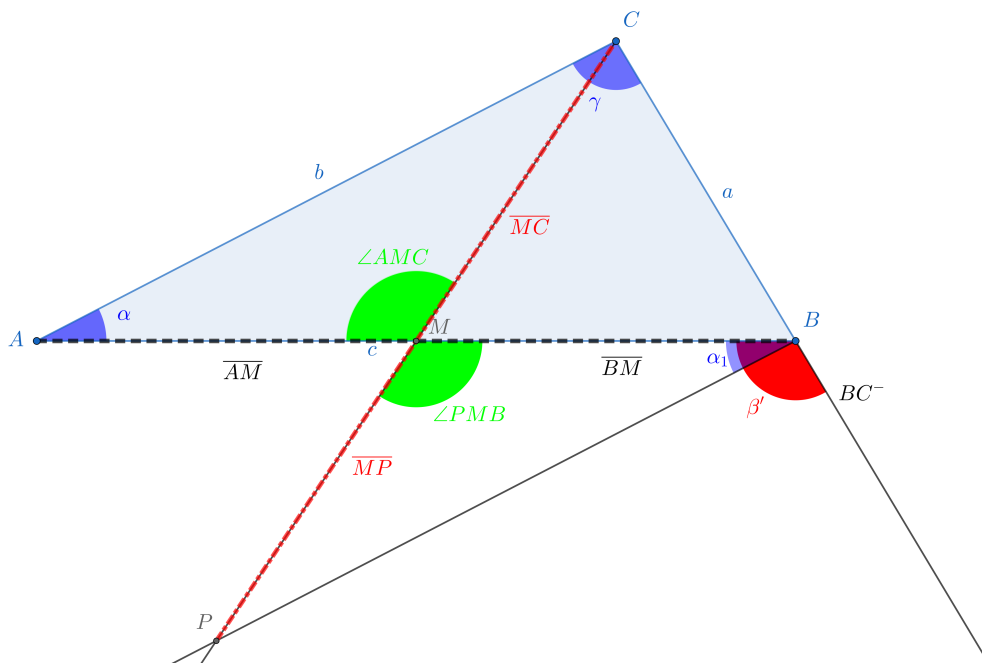
(M ist Mittelpunkt von \overline{AB})



(II) $\overline{MC} \cong \overline{MP}$ (Konstruktion von P)



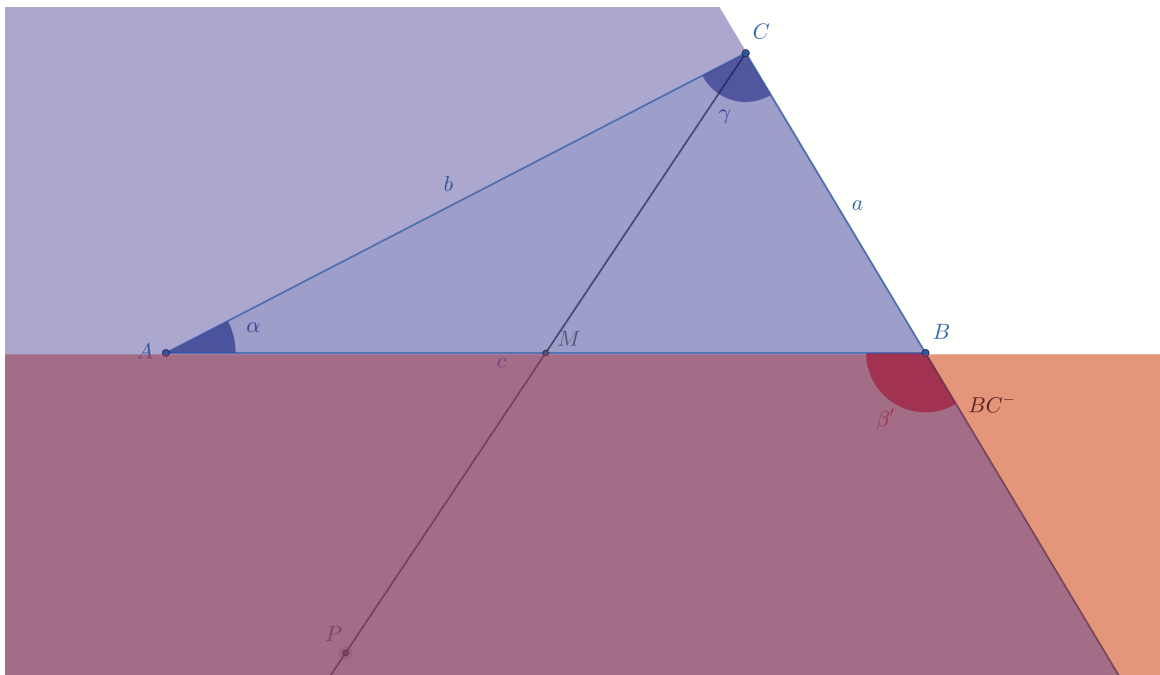
(III) $\angle AMC \cong \angle PMB$ (Scheitelwinkelsatz)



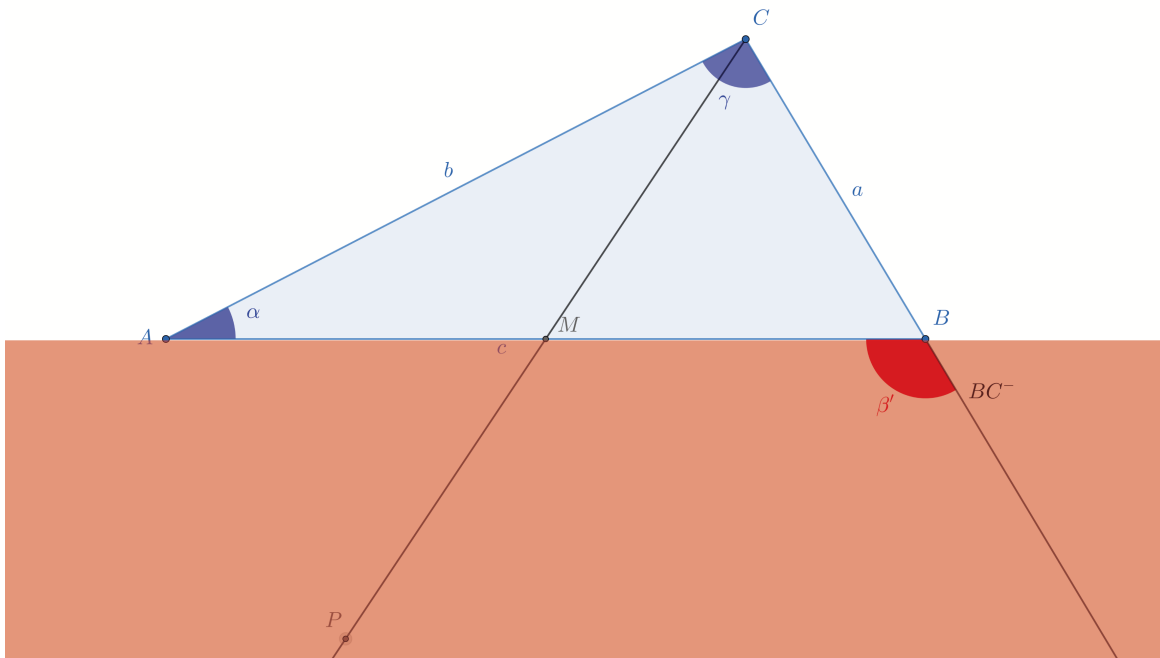
(IV) $\overline{AMC} \cong \overline{PMB}$ ((I), (II), (III), SWS)

(V) $\alpha \cong \alpha_1$ (IV)

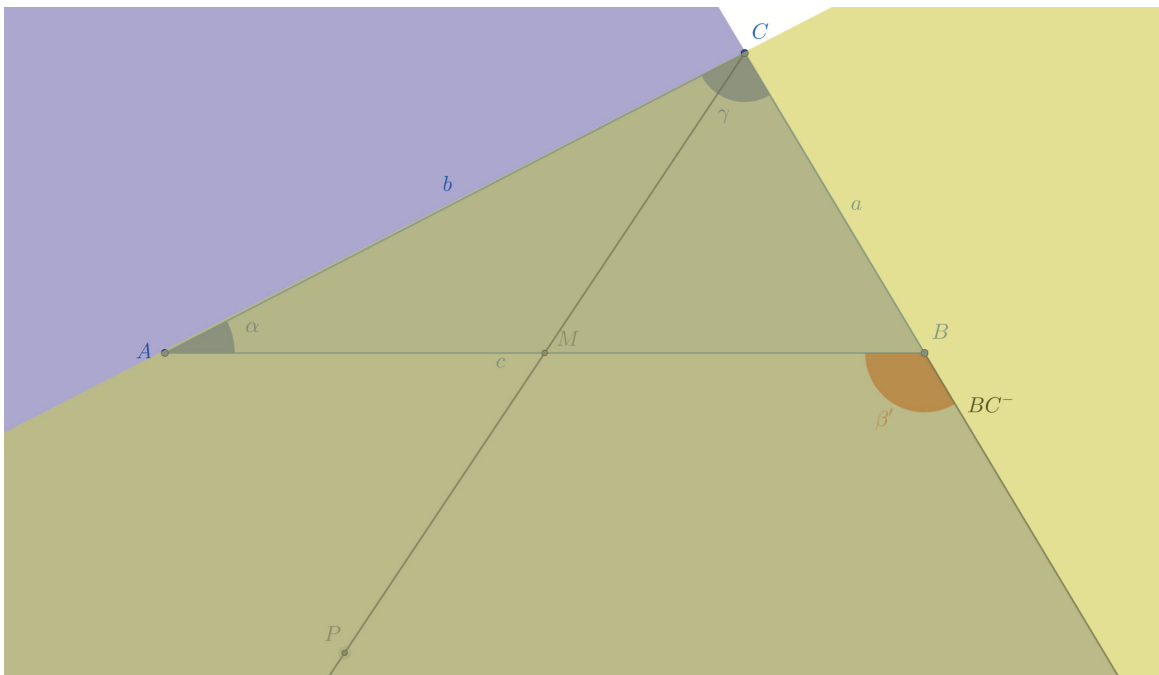
Um zu zeigen, dass $|\alpha_1| < |\beta'|$ gilt, müssen wir zeigen, dass BP^+ im Inneren von β' liegt. Hierzu genügt es zu zeigen, dass P im Inneren von β' liegt (Lemma 4.2). Das Innere des Winkels β' ist der Schnitt zweier Halbebenen: $I(\beta') = AB, C^- \cap BC, A^+$:



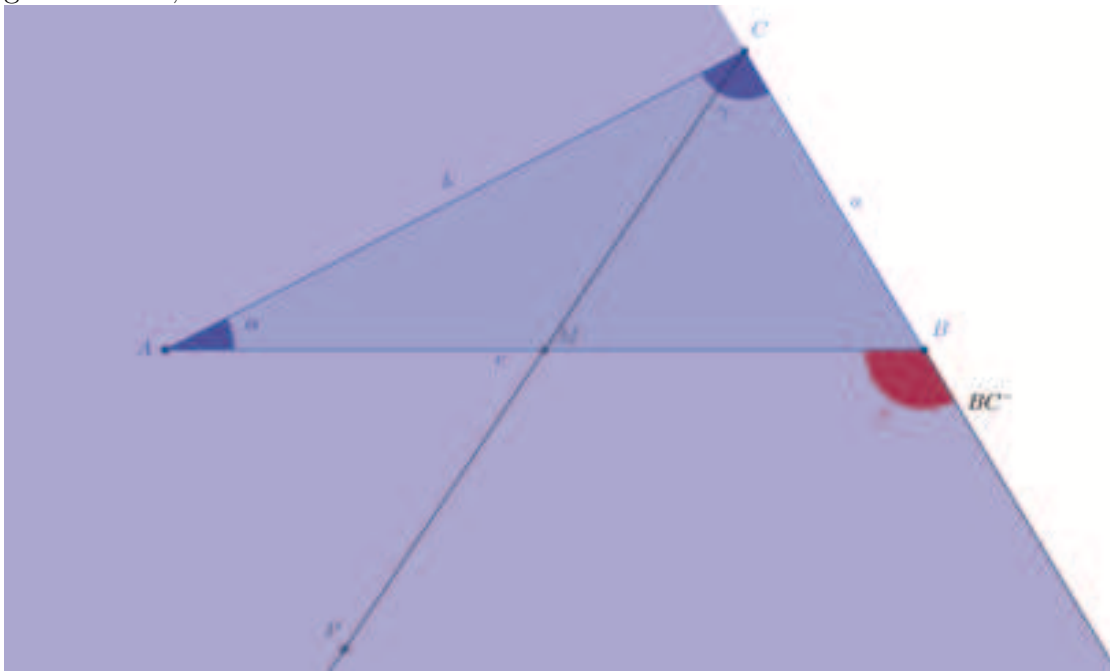
Wegen $\overline{PC} \cap AB = \{M\}$ liegt P in der Halbebene AB, C^- .



Weil M im Inneren des Winkels γ liegt, liegt nach Lemma 4.2 der Strahl CM^+ im Inneren von γ und damit auch der Punkt P .



Das Innere von γ ist die Schnittmenge $BC, A^+ \cap AC, B^+$. Weil P in dieser Schnittmenge liegt, gilt $P \in BC, A^+$.



6.3 Eindeutigkeit des Lotes

6.3.1 Satz

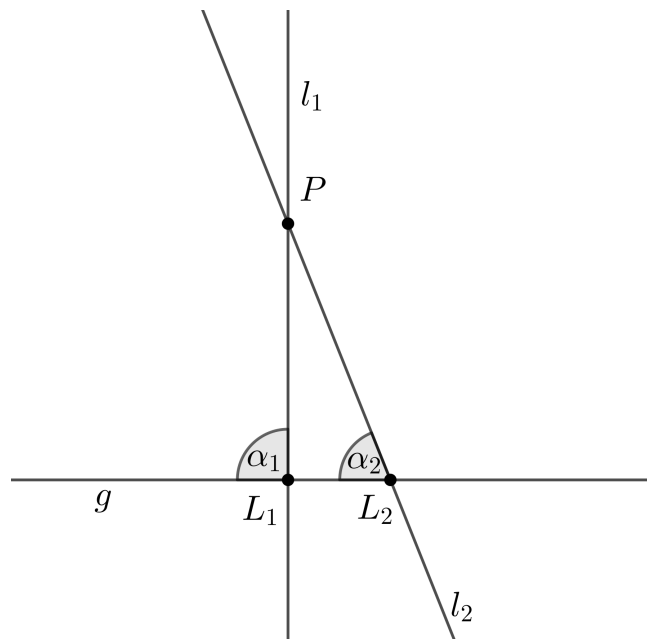
Satz 6.2

Eindeutigkeit des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade

Zu jedem Punkt P außerhalb einer Geraden g gibt es höchstens ein Lot von P auf g .

6.3.2 Beweis

Es sei P ein Punkt außerhalb der Geraden g . Wir nehmen an, dass es zwei verschiedene Lotgeraden l_1 und l_2 von P auf g gibt. Es seien L_1 und L_2 die Fußpunkte der entsprechenden Lote.



α_2 sei der Winkel $\angle PL_2L_1$ und α_1 sei der Winkel $\angle L_1P^+, L_1L_2^-$. Weil l_1 und l_2 als Lotgeraden senkrecht auf g stehen, sind α_1 und α_2 als rechte Winkel kongruent zueinander. Das ist jedoch ein Widerspruch, denn bezüglich des Dreiecks L_1L_2P ist α_1 ein Außenwinkel und α_2 ein Innenwinkel, der kein Nebenwinkel von α_1 ist. Nach dem schwachen Außenwinkelsatz muss α_1 also größer als α_2 sein. Unsere Annahme zweier verschiedener Lote von P auf g ist also zu verwerfen.

6.4 Basiswinkelsatz

6.4.1 Definition

Definition 6.1

gleichschenkliges Dreieck

Wenn ein Dreieck zwei zueinander kongruente Seiten hat, dann heißt das Dreieck gleichschenkelig. Die beiden zueinander kongruenten Seiten heißen Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks. Die dritte Seite des Dreiecks ist seine Basis. Die Innenwinkel des Dreiecks, deren Scheitel jeweils ein Endpunkt der Basis sind, heißen Basiswinkel des Dreiecks.

6.4.2 Satz

Satz 6.3

Basiswinkelsatz

Wenn ein Dreieck gleichschenkelig ist, dann sind seine Basiswinkel kongruent zueinander.

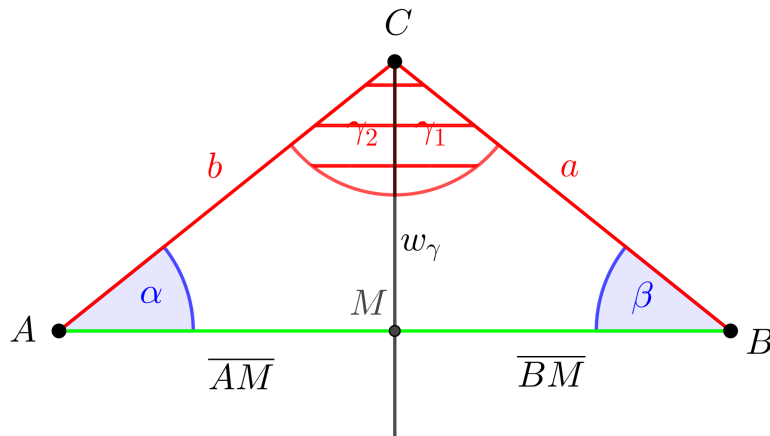
6.4.3 Beweis

Es sei \overline{ABC} ein Dreieck mit schulüblichen Bezeichnungen.

V: $a \cong b$

B: $\alpha \cong \beta$

Wegen der bereits bewiesenen Existenz der Winkelhalbierenden eines Winkels können wir auf die Winkelhalbierenden der Innenwinkel von \overline{ABC} zurückgreifen. Sei w_γ die Winkelhalbierende von γ . Nach den Lemmata „Geschichten aus dem Inneren“ schneidet w_γ die Seite c in einem Punkt M .



Nr.	Beweisschritt	Begründung des Beweisschrittes
(I)	$a \cong b$	Voraussetzung
(II)	$\overline{CM} \cong \overline{CM}$	trivial b
(III)	$\angle ACM \cong \angle BCM$	w_γ ist Winkelhalbierende von γ
(IV)	$\overline{AMC} \cong \overline{BMC}$	(I), (II), (III), SWS
(V)	$\alpha \cong \beta$	(IV), Definition der Dreieckskongruenz

6.5 Das Mittelsenkrechtenkriterium

6.5.1 Satz

Satz 6.4

Mittelsenkrechtenkriterium

Es sei \overline{AB} ein Strecke mit der Mittelsenkrechten m .

$$P \in m \Leftrightarrow \overline{PA} \cong \overline{PB}$$

6.5.2 Beweis

Satz 6.5

Hinrichtung Mittelsenkrechtenkriterium

Es sei m die Mittelsenkrechte von \overline{AB} .

$$P \in m \Rightarrow \overline{PA} \cong \overline{PB}$$

Beweis der Hinrichtung des Mittelsenkrechtenkriteriums:

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- (1) P ist der Mittelpunkt M von \overline{AB} .
- (2) P ist nicht der Mittelpunkt M von \overline{AB} .

Fall (1) ist trivial. Wir gehen im folgenden von Fall (2) aus.

Nr.	Beweisschritt	Begründung des Beweisschrittes
(I)	$\angle PMA \cong \angle PMB$	$P \in m$, Eigenschaft der Mittelsenkrechten von \overline{AB}
(II)	$\overline{AM} \cong \overline{BM}$	M ist der Mittelpunkt von \overline{AB}
(III)	$\overline{CM} \cong \overline{CM}$	trivial, bzw. Reflexivität von \cong
(IV)	$\overline{AMC} \cong \overline{BMC}$	(I), (II), (III), SWS
(V)	$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	(IV), Definition der Dreieckskongruenz

Mittelsenkrechtenkriterium: Rückrichtung

Satz 6.6

Rückrichtung Mittelsenkrechtenkriterium

Es seien m die Mittelsenkrechte von \overline{AB} und P ein Punkt.

$$\overline{PA} \cong \overline{PB} \Rightarrow P \in m$$

Beweis der Rückrichtung des Mittelsenkrechtenkriteriums:

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- (1) P ist der Mittelpunkt M von \overline{AB} .
- (2) P ist nicht der Mittelpunkt M von \overline{AB} .

Im Fall (1) fällt P mit dem Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} zusammen. Der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} ist nach Definition des Begriffs Mittelsenkrechte ein Punkt derselben. Wir gehen im folgenden von Fall (2) aus.

Voraussetzung: $\overline{AP} \cong \overline{BP}$

Behauptung: P ist ein Punkt der Mittelsenkrechten m von \overline{AB}

Es sei M der Mittelpunkt von \overline{AB} . Um zu zeigen, dass P zur Mittelsenkrechten von \overline{AB} gehört, genügt es zu zeigen, dass die Winkel $\angle PMA$ und $\angle PMB$ zueinander kongruent sind:

Nr.	Beweisschritt	Begründung des Beweisschrittes
(I)	$\overline{AM} \cong \overline{BM}$	M ist der Mittelpunkt von \overline{AB}
(II)	$\overline{PA} \cong \overline{PB}$	Voraussetzung
(III)	$\angle PAM \cong \angle PBM$	(II), Basiswinkelsatz
(IV)	$\overline{PMA} \cong \overline{PMB}$	(I), (II), (III), SWS
(V)	$\angle PMA \cong \angle PMB$	(IV), Definition Dreieckskongruenz

6.6 Umkehrung des Basiswinkelsatzes

6.6.1 Satz

Satz 6.7

Umkehrung des Basiswinkelsatzes

Es sei \overline{ABC} ein Dreieck.

$$\angle CAB \cong \angle CBA \Rightarrow \overline{AC} \cong \overline{BC}$$

6.6.2 Beweis

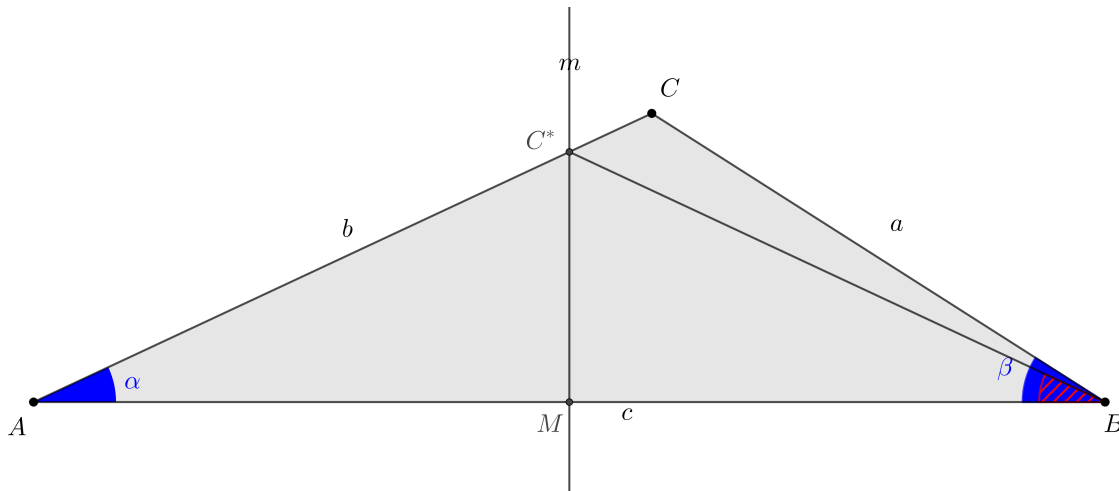
Es sei \overline{ABC} ein Dreieck mit schulüblichen Bezeichnungen.

V: $\alpha \cong \beta$

B: $a \cong b$

Wir errichten auf c die Mittelsenkrechte m . Wenn diese Mittelsenkrechte durch den Punkt C geht, dann wäre C ein Punkt der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{AB} und C hätte zu den Punkten A und B nach dem Mittelsenkrechtenkriterium jeweils denselben Abstand, was $a \cong b$ bedeuten würde.

Wir nehmen an, dass m nicht durch C geht. Dann muss m nach dem Axiom von Pasch genau eine der beiden Seiten a oder b innerhalb schneiden. Sei dieses o.B.d.A die Seite b . Den Schnittpunkt von m mit a wollen wir C^* nennen.



Nr.	Beweisschritt	Begründung des Beweisschrittes
(I)	$\overline{C^*A} \cong \overline{C^*B}$	C^* ist Punkt der Mittelsenkrechten von \overline{AB} , Mittelsenkrechtenkriterium
(II)	$\alpha \cong \angle ABC^*$	(I), Basiswinkelsatz
(III)	$ \angle ABC^* < \beta $	zw(AC^*C), AC^{*+} liegt damit im Inneren von β
(IV)	$ \alpha < \beta $	(II),(III), \nrightarrow zur Voraussetzung

6.7 Kongruenzsatz SSS

6.7.1 Satz

Satz 6.8

SSS

Es sei $\text{nkoll}(A, B, C) \wedge \text{nkoll}(A', B', C')$.

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \wedge \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \wedge \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \Rightarrow \overline{ABC} \cong \overline{A'B'C'}$$

6.7.2 Beweis

Gegeben seien die Dreiecke \overline{ABC} und $\overline{A'B'C'}$. Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

V1: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

V2: $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

V3: $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

Folgendes wird jetzt behauptet:

B1: $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$

B2: $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$

B3: $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$

Es genügt B1 zu zeigen, danach greift SWS und die beiden Dreiecke sind kongruent zueinander. Für den Beweis führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$c := \overline{AB}, b := \overline{AC}, a := \overline{BC}, \alpha := \angle CAB$$

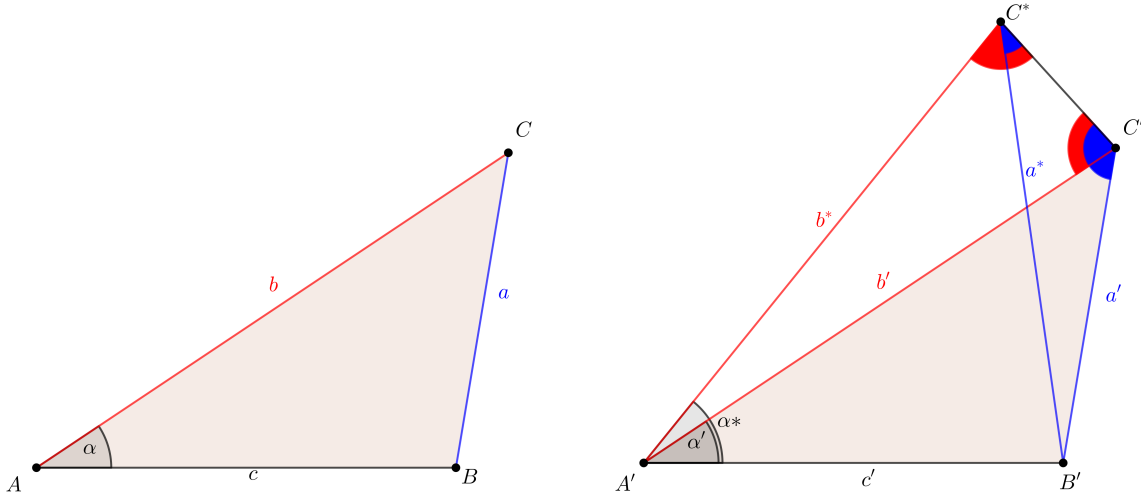
$$c' := \overline{A'B'}, b' := \overline{A'C'}, a' := \overline{B'C'}, \alpha' := \angle C'A'B'$$

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass α und β nicht kongruent zueinander sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|\alpha| > |\alpha'|$. Dann gibt es nach dem Axiom vom Lineal und dem Winkelkonstruktionsaxiom einen Punkt $C^* \in A'B', C'^+$ derart, dass für den Winkel $\alpha^* := \angle B'A'C^*$ und die Strecke $c^* = \overline{A'C^*}$ das Folgende gilt:

$$\alpha^* \cong \alpha \tag{3}$$

$$b^* \cong b \tag{4}$$

Nach SWS ist jetzt \overline{ABC} zu $\overline{A'B'C^*}$ kongruent.



Unter Berücksichtigung der Voraussetzungen gilt entsprechend dieser Dreieckskongruenz:

$$a' \cong a^* \quad (5)$$

$$b' \cong b^* \quad (6)$$

Aus (4) und (5) folgt, dass die Dreiecke $\overline{A'C'C^*}$ und $\overline{B'C'C^*}$ gleichschenkelig sind. Wegen dieser Gleichschenkligkeit sind die folgenden Winkel nach dem Basiswinkelsatz kongruent.

$$\angle B'C'C' \cong \angle B'C'C^* \text{ (blaue Winkel)} \quad (7)$$

$$\angle A'C'C' \cong \angle A'C'C^* \text{ (rote Winkel)} \quad (8)$$

Weil $|\alpha^*| = |\alpha| > |\alpha'|$ schneidet $A'C'^+$ die Strecke $a^* = \overline{B'C^*}$

Für die Lage von C' bezüglich $B'C^*$ gibt es jetzt genau drei Möglichkeiten:

$$(I) \quad \overline{A'C'} \cap B'C^* = \{C'\}$$

$$(II) \quad \overline{A'C'} \cap B'C^* = \{S\}, S \neq C'$$

$$(III) \quad \overline{A'C'} \cap B'C^* = \emptyset$$

Fall (I):

In diesem Fall fällt der Winkel $\beta' = \angle A'B'C'$ mit dem Winkel $\beta^* = \angle A'B'C^*$ zusammen. Wegen $\overline{ABC} \cong \overline{A'B'C^*}$ gilt $\beta \cong \beta^* \equiv \beta'$ und damit $\beta \cong \beta'$. Damit sind die beiden Dreiecke \overline{ABC} und $\overline{A'B'C'}$ nach SWS kongruent. q.e.d.

Fall (II):

Diesem Fall entspricht die obige Skizze. $C^*B'^+$ liegt jetzt im Inneren des blauen Winkels bei C^* .

Aus diesem Grund ist der rote Winkel bei C^* größer als der blaue Winkel bei C^* . Weil $C'A'^+$ im Inneren des blauen Winkels bei C' liegt, ist der blaue Winkel bei C' größer als der rote Winkel bei C' . Die blauen Winkel und die roten Winkel sind jeweils als Basiswinkel. Damit sind die blauen Winkel untereinander gleich groß und die beiden roten Winkel haben auch dieselbe Größe. Damit ergibt sich:

Roter Winkel bei C^* größer als blauer Winkel bei C^* so groß wie blauer Winkel bei C' größer als roter Winkel bei C' . Zusammenfassung: Die beiden roten Winkel haben verschiedene Größen. Als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks $\overline{A'C'C^*}$ sind die roten Winkel jedoch kongruent zueinander. ζ

Fall (III):

Übungsaufgabe

6.8 Seiten-Winkel-Beziehung in Dreiecken

6.8.1 Satz

Satz 6.9

Seiten-Winkel-Beziehung

Es sei \overline{ABC} ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen.

$$|a| > |b| \Rightarrow |\alpha| > |\beta|$$

(Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.)

6.8.2 Beweis

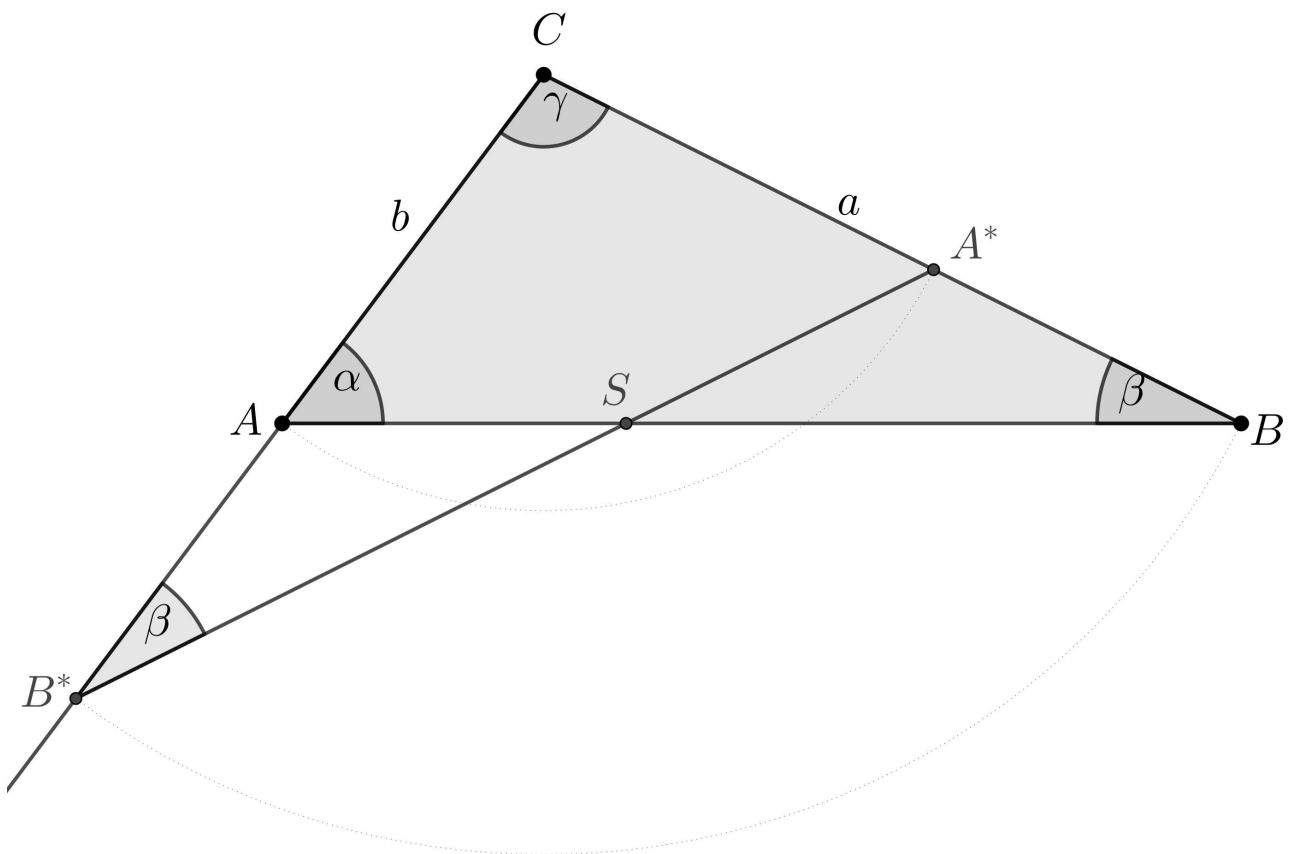
Voraussetzung:

$$|a| > |b|$$

Behauptung

$$|\alpha| > |\beta|$$

Nr.	Beweisschritt	Begründung des Beweisschrittes
(I)	$\exists B^* \in CA^+ : \overline{CB^*} \cong a$	Axiom vom Lineal
(II)	$\exists A^* \in CA^+ : \overline{CA^*} \cong b$	Axiom vom Lineal
(III)	$zw(C, A, B^*)$	(I), $ a > b $
(IV)	$zw(C, A^*, B)$	(II), $ a > b $
(V)	$\exists S \in \overline{AB} : A^*B^* \cap AB$	(III), (IV), Axiom von Pasch
(VI)	$\overline{ABC} \cong \overline{A^*B^*C}$	(I), (II), $\gamma \cong \gamma$, SWS
(VII)	$ \angle CB^*A^* = \beta $	(VI)
(VIII)	$ a > b $	(VII), schwacher Außenwinkelsatz in Bezug auf $\overline{AB^*S}$



Es folgt unmittelbar das folgende Korollar:

Satz 6.10

Korollar aus der Seiten-Winkel-Beziehung

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann ist die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite

des Dreiecks (die Hypotenuse) die längste Seite des Dreiecks.

Beweis: Nach einem Korollar aus dem schwachen Außenwinkelsatz ist der rechte Winkel der größte Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks. Ihm liegt nach der Seiten-Winkel-Beziehung auch die größte Seite des Dreiecks gegenüber.

6.9 Winkel-Seiten-Beziehung in Dreiecken

6.9.1 Satz

Satz 6.11

Winkel-Seiten-Beziehung in Dreiecken

Es sei \overline{ABC} ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen.

$$|\alpha| > |\beta| \Rightarrow |a| > |b|$$

(Dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber.)

6.9.2 Beweis

Voraussetzung:

$$|\alpha| > |\beta|$$

Behauptung

$$|a| > |b|$$

Annahme:

$$|a| \leq |b|$$

(I) $a \cong b$

In diesem Fall greift der Basiswinkelsatz und es gilt $\alpha \cong \beta$ \nmid Voraussetzung.

(II) $|a| < |b|$

In diesem Fall greift der Satz über die Seiten-Winkel-Beziehung und es folgt $|\alpha| < |\beta|$ \nmid Voraussetzung.

6.10 Abstand eines Punktes zu einer Geraden

6.10.1 Definition

Definition 6.2

Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Es seien P ein Punkt und g eine Gerade. Wenn P außerhalb von g liegt, dann ist die Länge

des Lotes von P auf g der Abstand von P zu g :

$$|Pg| := |PL|, L \in g \wedge PG \perp g$$

Wenn $P \in g$ dann $|Pg| = 0$.

6.10.2 Abstand als kürzeste Verbindung eines Punktes zu einer Geraden

Satz 6.12

Lot ist die kürzeste Verbindung

Es sei P ein Punkt außerhalb der Geraden g . Wenn \overline{PL} das Lot von P auf g ist, dann gilt für jeden von L verschiedenen Punkt G der Geraden g :

$$|PL| < |PG|$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar daraus, dass das Dreieck \overline{PLG} rechtwinklig bei L ist und damit $|PG| > |PL|$

Satz 6.13

Kürzeste Verbindung ist das Lot

Es sei P ein Punkt außerhalb der Geraden g . Wenn $|PL| = \min\{|PG| \mid G \in g\}$, dann $PL \perp g$.

Sollte $PL \not\perp g$ sein, gäbe es genau einen Punkt $L^* \in g$ mit $PL^* \perp g$. Nach dem vorangegangenen Satz wäre $|PL^*| < |PL|$. Damit könnte $|PL|$ nicht das Minimum von $\{|PG| \mid G \in g\}$ sein.

6.10.3 Hinrichtung des Winkelhalbierendenkriterium

Satz 6.14

Winkelhalbierendenkriterium Teil I

Jeder Punkt der Winkelhalbierenden eines Winkels hat zu den Schenkeln des Winkels jeweils denselben Abstand.

6.10.4 Beweis

Es sei P ein Punkt der Winkelhalbierenden w des Winkels α . l_1 sei das Lot von P auf den einen Schenkel von α , l_2 sei das Lot von P auf den anderen Schenkel von α , L_1 und L_2 seien die zugehörigen Lotfußpunkte. Der Scheitel von α sei mit S bezeichnet. Wir bezeichnen ferner die Winkel $\angle PSL_1$ und $\angle PSL_2$ als α_1 und α_2 . Weil P ein Punkt der Winkelhalbierenden von α ist und weil l_1 und l_2 Lote sind dürfen wir Folgendes voraussetzen:

V1: $l_1 \perp SL_1$

V2: $l_2 \perp SL_2$

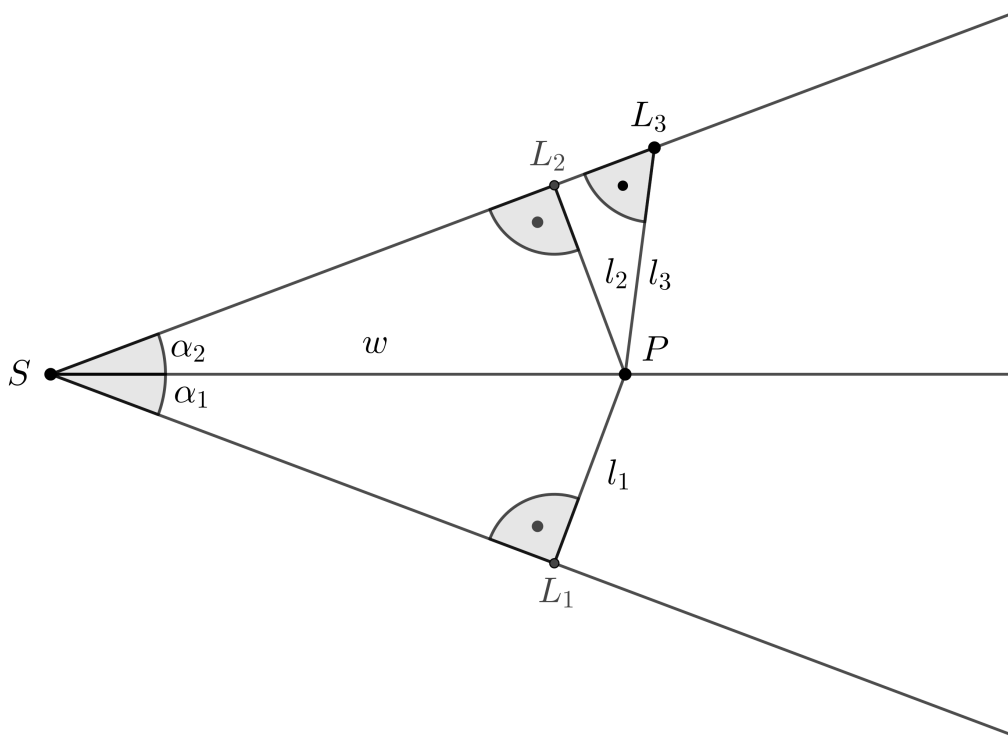
V3: $\alpha_1 \cong \alpha_2$

Ferner gilt die Trivialität $\overline{SP} \cong \overline{SP}$. Zu zeigen haben wir die Behauptung:

B: $l_1 \cong l_2$

Wir hätten die Behauptung gezeigt, wenn wir die Kongruenz der beiden Dreiecke $\overline{SPL_1}$ und $\overline{SPL_2}$ gezeigt hätten. Die beiden Dreiecke wären nach SWS kongruent, wenn $\overline{SL_1} \cong \overline{SL_2}$ gelten würde.

Wir nehmen an, dass $|\overline{SL_1}| \neq |\overline{SL_2}|$ gilt. Dann existiert auf SL_2^+ nach dem Axiom vom Lineal genau ein Punkt L_3 mit $\overline{SL_3} \cong \overline{SL_1}$. Nach SWS sind jetzt die beiden Dreiecke $\overline{SPL_1}$ und $\overline{SPL_3}$ zueinander kongruent. Wegen dieser Kongruenz steht $l_3 = \overline{PL_3}$ senkrecht auf SL_2 . Damit wären l_2 und l_3 zwei verschiedene Lote von P auf die Gerade SL_2 . Das ist nach dem Satz über die Eindeutigkeit des Lotes jedoch nicht möglich.



6.10.5 Rückrichtung des Winkelhalbierendenkriterium

Satz 6.15

Winkelhalbierendenkriterium Teil II

Wenn ein Punkt aus dem Inneren eines Winkels zu den Schenkeln dieses Winkels jeweils denselben Abstand hat, dann ist er ein Punkt der Winkelhalbierenden des Winkels.

6.10.6 Beweis