

Kontrollfragen/Themen: Mathematische Grundlagen der Computergrafik

Michael Gieding, Fach Mathematik, PH Heidelberg

1 Kreise und weitere Kurven

1.1 Satz des Pythagoras als Grundlage in der Computergrafik

1.1.1 Der Satz des Pythagoras

1. Formulieren Sie den Satz des Pythagoras.
2. Beweisen Sie den Satz von Pythagoras.
3. Es sei k ein Kreis in Mittelpunktslage mit dem Radius r . Formulieren Sie den Satz des Pythagoras für die Koordinaten (x_p, y_p) eines beliebigen Punktes $P \in k$.

1.1.2 Algorithmen zum Zeichnen von Kreisen auf der Grundlage des Satzes von Pythagoras

1. Erläutern Sie einen prinzipiellen Algorithmus zum Zeichnen eines Kreises auf einem Pixelbildschirm, der auf dem Satz des Pythagoras aufbaut.
2. Erläutern Sie den Algorithmus von Bresenham zum Zeichnen von Kreisen auf Pixelbildschirmen.

1.1.3 Weitere Anwendungen des Satzes von Pythagoras

1. Berechnen Sie die Höhe eines Tetraeders mit der Kantenlänge a
2. Berechnen Sie die Höhe eines Oktaeders mit der Kantenlänge 1.

1.2 Sinus und Kosinus als Grundlage zur Beschreibung von Kreisen und weiteren Kurven

1.2.1 Sinus und Kosinus am Einheitskreis

1. Erläutern Sie, was man unter Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck versteht.
2. Erläutern Sie die Definition der Sinus- und der Kosinusfunktion am Einheitskreis.
3. Erläutern Sie den Funktionsgraphen der Funktionen $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \cos x$.
4. Leiten Sie die Formel für die Umrechnung von Grad- in Bogenmaß (und umgekehrt) her.
5. Beweisen Sie $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ und $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
6. Beweisen Sie $\sin 45^\circ = \cos 35^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
7. Beweisen Sie $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

1.2.2 Parameterdarstellungen von Kurven in der Ebene und im Raum

1. Begründen Sie: Die Parameterdarstellung $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$ beschreibt für beliebig aber feste $r \in \mathbb{R}^+$ und $0 \leq \varphi < 2\pi, \varphi \in \mathbb{R}$ einen Kreis in Mittelpunktslage.
2. Erläutern Sie den Einfluß der Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ auf den Funktionsgraphen der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow [-a, a]$ mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$.
3. Leiten Sie eine Parameterdarstellung für eine Lissajousfigur mit einem Knoten her.
4. Leiten Sie eine Parameterdarstellung für eine Astroide her.
5. Was versteht man unter einer Archimedischen Spirale? Welche Parameterdarstellungen beschreiben diese Spiralen?
6. Ein Faden wird gleichmäßig auf einen Zylinder aufgewickelt. Leiten Sie eine Parameterdarstellung für die entstehende Schraubenlinie her.

7. In der Mathematikdidaktik spricht man vom Spiralprinip. Warum wäre es besser von Schraubenlinienprinzip zu sprechen?
8. * zum Üben für Unentwegte: Es sei k ein Kreis mit dem Radius r . Auf dem Kreis ist ein unendlich dünner und unendlich langer Faden f aufgewickelt. Der Faden f möge den Anfangspunkt A haben. Wir nehmen A und wickeln f derart ab, dass der Faden immer gespannt ist. Die Kurve, die A beschreibt heißt Kreisevolvente. Entwickeln Sie eine Parameterdarstellung für Kreisevolventen. (Anwendung: Die Flanken der Zähne von Zahnrädern sind in der Regel Stücke von Kreisevolventen.)

2 Polyeder

2.1 Datenstrukturen zur Beschreibung von Polyedern

2.1.1 Würfel und Quader

1. Beschreiben Sie die Eckpunkte eines Würfels der Kantenlänge 1 durch ihre Koordinaten bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems, dessen Ursprung der Schnittpunkt der Raumdiagonalen dieses Würfels ist.
2. Beschreiben Sie die Flächen des Würfels aus obiger Aufgabe.
3. Erläutern Sie, wie man in einer Exceltabelle einen Würfel beschreiben kann.
4. Verändern Sie die Daten des Würfels derart, dass ein Quader ohne quadratische Flächen entsteht.

2.1.2 Pyramiden

1. Entwickeln Sie die Datenstruktur einer quadratischen Pyramide, bei der alle Kanten die Länge 1 haben.
2. Entwickeln Sie die Datenstruktur eines Tetraeders mit der Kantenlänge 1.

2.2 3D $\rightarrow$ 2D Projektionen

1. Erläutern Sie, was man unter senkrechter Parallelprojektion versteht.
2. Welche Koordinaten hat das Bild des Punktes $P(-4, 3, -1)$ bei senkrechter Parallelprojektion, wenn die $x - y$ -Ebene als Bildebene verwendet wird.
3. Erläutern Sie, was man unter Zentralprojektion versteht.

4. Für eine Zentralprojektion sei die $y - z$ -Ebene als Bildebene gewählt. Der Zentralpunkt Z habe die Koordinaten $(-5, 0, 0)$. Berechnen Sie die Bilder der Punkte $A(3, 4, 5)$ und $B(x_b, y_b, z_b)$ bei dieser Zentralprojektion.
5. Es sei d der Abstand des Zentralpunktes Z bei einer Zentralprojektion Z_p . Begründen Sie: Für $d \rightarrow \infty$ geht Z_p in eine Parallelprojektion über.

2.3 Drehungen und Kippungen

1. Erläutern Sie, wie die Matrizenmultiplikation definiert ist.
2. Erläutern Sie die Matrix, die eine Drehung um die z -Achse beschreibt.
3. Erläutern Sie die Matrix, die eine Kippung um die y -Achse beschreibt.

2.4 Sichtbarkeit

1. Definieren Sie: konvexer Körper.
2. Erläutern Sie, was man unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren versteht.
3. Berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
4. Erläutern Sie den Begriff des Normalenvektors.
5. Was versteht man unter dem Kreuzprodukt zweier Vektoren?
6. Berechnen Sie das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
7. Wie kann durch Berechnung von Kreuz- und Skalarprodukten die Sichtbarkeit von Flächen konvexer Körper untersucht werden?