Übungsaufgaben zur Lehrveranstaltung Einführung in die Geometrie

Michael Gieding

15. Juli 2018

Pädagogische Hochschule Heidelberg,
Institut für Mathematik und Informatik

120 Aufgaben, 100 Lösungen

Aufgaben

Serie 1

Aufgabe 1.01

Es seien a und b zwei reelle Zahlen. Definieren Sie den Begriff arithmetisches Mittel von a und b.

Aufgabe 1.02

Es seien a und b zwei natürliche Zahlen. Definieren Sie den Begriff größter gemeinsamer Teiler (ggT) von a und b.

Aufgabe 1.03

Informieren Sie sich darüber, was man unter der Gärtnerkonstruktion einer Ellipse versteht. Entwickeln Sie eine Definition des Begriffs Ellipse, wie er sich unmittelbar aus der Gärtnerkonstruktion ergibt.

Aufgabe 1.04

Mark definiert den Begriff des Rechtecks wie folgt:

Definition 1 (*Rechteck*)

Ein Rechteck ist ein Viereck, das einen rechten Innewinkel hat und bei dem die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleichlang zueinander sind.

Diskutieren Sie, ob die Eigenschaft der Minimalität für Marks Definition gewährleistet ist.

Aufgabe 1.05

Der Begriff der Parallelität zweier Geraden sei bereits definiert. Definieren Sie, was man darunter versteht, dass zwei Geraden windschief zueinander sind.

Aufgabe 1.06

In der Differentialgeometrie ist der Begriff der "Krümmung einer Kurve" von zentraler Bedeutung. Kreise sind Kurven mit "konstanter Krümmung", d.h. ein Kreis hat in jedem seiner Punkte dieselbe Krümmung. Je größer ein Kreis k ist, desto mehr nähern sich hinreichend kleine Teilstücke des Kreises Geradenstücken an. Je größer ein Kreis ist, desto geringer ist somit seine Krümmung. Geraden sind auch Kurven konstanter Krümmung, Jede Gerade hat in jedem ihrer Punkte die Krümmung 0. Geraden könnte man als Kreise mit unendlich großem Radius auffassen. Entwerfen Sie eine sinnvolle Definition des Begriffes "Krümmung eines Kreises".
Hinweis: Krümmungen werden durch reelle Zahlen angegeben.

Aufgabe 1.07

Sie wollen Ihre Schüler erleben lassen, dass Kreise Kurven mit konstanter Krümmung sind. Wie machen Sie das?

Aufgabe 1.08

Ellipsen lassen sich auch als Kegelschnitte definieren. Es sei K ein Kegel mit dem Öffnungswinkel α und der Spitze S. Seine Rotationsachse R möge senkrecht auf der Ebene ε_0 stehen. Es sei ε eine zweite Ebene, die K schneidet.
Ergänzen Sie:

Definition 2 (*Ellipse*)

Wenn ... , dann ist der Schnitt von ε mit K eine Ellipse.

Aufgabe 1.09

Was wird hier definiert?

Definition 3 (...)

Es sei r ein positive reelle Zahl. $M := \{(r \cdot \cos(\varphi)|r \cdot \sin(\varphi)|\varphi \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$.

Aufgabe 1.10

Diskutieren Sie die folgende Definition:

Definition 4 (*Size-Zero-Menge*)

Es sei K ein kartesisches Koordinatensystem. Unter einer Size-Zero-Menge versteht man die Menge aller Punkte $P\,(x_p|y_p)$ mit $x_p < 0 \wedge y_p = \sqrt{x_p}$.

Serie 2

Aufgabe 2.01

Ergänzen Sie die Lücken durch Verwendung von

- *notwendig aber nicht hinreichend*
- *hinreichend aber nicht notwendig*
- *hinreichend*
- *notwenig*
- *notwendig und hinreichend.*
- *weder notwendig noch hinreichend*

Sollten mehrere diesbezügliche Auswahlmöglichkeiten bestehen, verwenden Sie die schärfste der möglichen Formulierungen.

1 Dafür, dass t die Summe $a+b$ teilt, ist es ... , dass t sowohl a als auch b teilt. $(t, a, b \in \mathbb{N})$

2 Dafür, dass $\overline{ABCD}$ ein Rechteck ist, ist es ... , dass $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ gilt.

3 Dafür, dass ein Dreieck $\overline{ABC}$ rechtwinklig ist, ist es ... , dass kein Innenwinkel von $\overline{ABC}$ größer als 90° ist.

4 Dafür, dass ein Dreieck $\overline{ABC}$ stumpfwinklig ist, ist es ... , dass ein Innenwinkel von $\overline{ABC}$ größer als 90° ist.

5 Dafür, dass ein Dreieck rechtwinklig ist, ist es ... , dass der Mittelpunkt seines Umkreises der Mittelpunkt einer seiner Seiten ist.

6 Dafür dass ein Viereck ein Rechteck ist, ist es ... , dass alle seine Seiten gleichlang sind.

7 Dafür dass ein Viereck ein Rechteck ist, ist es ... , dass es einen rechten Innenwinkel hat und alle seine Seiten gleichlang sind.

Aufgabe 2.02

Unter einem Trapez wollen wir ein Viereck verstehe, das ein Paar zueinender paralleler Seiten hat. Es sei $\overline{ABCD}$ ein Trapez. Formulieren Sie

- eine zwar hinreichende aber nicht notwendige Bedingung dafür, dass $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ gilt,
- eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ gilt,
- eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung dafür, dass $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ gilt,
- ein Kriterium dafür, dass $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ gilt.

Aufgabe 2.03

Definieren Sie den Begriff Parallelogramm

- nur unter Verwendung der Eigenschaften der Seitenlängen von Parallelogrammen,
- unter Verwendung Semantik der Begriffsbezeichnung,

Aufgabe 2.04

Sie haben einen Klassensatz Heidelberger Winkelkreuze. Mit dem Heidelberger Winkelkreuz lassen Sie Ihre Schüler nur Parallelogramme spannen. Danach sollen sie eine Regel entwickeln, welche Stifte auf den Schenkeln des Kreuzes auszuwählen sind, damit ein Parallelogramm gespannt wird. Sie dürfen davon ausgehen, dass die vier Schenkel des Kreuzes nummeriert sind und alle die Stifte, die denselben Abstand zum Drehpunkt des Kreuzes haben, mit derselben Farbe angestrichen wurden: Rot, Grün, Blau, Gelb (von innen nach außen).

1 Wie könnte diese Regel formuliert sein?

2 Formulieren Sie eine Definition des Begriffs Parallelogramm, der sich unmittelbar aus dieser Regel ergibt.

Aufgabe 2.05

Aus der Grundschule sei Ihren Schülern der Begriff der *Symmetrieachse* bekannt.
Mit Ihrer 6. Klasse wollen Sie den Begriff der *Mittelsenkrechten* einer Strecke erarbeiten. Hierzu lassen Sie die Schüler auf ein Blatt Papier möglichst zentral auf dem Blatt eine beliebige hinreichend lange Strecke $\overline{AB}$ zeichnen. Formulieren Sie einen Arbeitsauftrag für Ihre Schüler der auf die Erarbeitung des Begriffes *Mittelsenkrechte* hinausläuft. Formulieren Sie eine Definition des Begriffs *Mittelsenkrechte* unter Verwendung des bereits bekannten Begriffs der *Symmetrieachse*.

Aufgabe 2.06

In gewisser Weise lassen sich Definitionen als Handlungsanleitungen zur Generierung von Repräsentanten des zu definierenden Begriffs formulieren. Derartig formulierte Definitionen heißen *genetisch operative Definitionen*. Formulieren Sie eine genetisch operative Definition des Begriffs *Umkreis eines Dreiecks*.

Aufgabe 2.07

Definition 5 (*konvexes Viereck*)

> *Ein Viereck heißt konvex, wenn es keinen überstumpfen Innenwinkel hat.*

Formulieren Sie ein Diagonalenkriterium für konvexe Vierecke. (Ein Beweis der Korrektheit Ihres Kriteriums ist nicht gefordert.)

Aufgabe 2.08

Was wurde mit der folgenden Menge S definiert?

Definition 6 (*S*)

> *Es sei $s \in \mathbb{R}, s > 0$ und M ein beliebiger Punkt. $S := \{P \mid |PM| < s\}$.*

Aufgabe 2.09

Es seien M und N zwei Mengen. Definieren Sie:

1. $M \cup N$ und
2. $M \cap N$

Aufgabe 2.10

Ein Drehellipsoid erhält man, wenn man eine Ellipse um die Gerade, die durch ihre beiden Brennpunkte F_1 und F_2 eindeutig bestimmt ist, rotieren lässt. Ergänzen Sie:

Definition 7 (*Drehellipsoid*)

> *Es seien F_1 und F_2 zwei Punkte. Ferner sei a eine positive reelle Zahl. Unter einem Drehellipsoid versteht man die Menge aller Punkte P, mit ...*

Serie 3

Definitionen und Definieren

Aufgabe 3.01

Die Begriffe Winkel , Schenkel eines Winkels, Scheitel eines Winkels und Größe eines Winkels seien bereits mathematisch exakt definiert. Definieren Sie in Form einer mathematisch korrekten Konventionaldefinitionen die Begriffe:

1. spitzer Winkel
2. rechter Winkel
3. stumpfer Winkel

Aufgabe 3.02

Die Begriffe Dreieck, Seiten eines Dreiecks, Eckpunkte eines Dreiecks und Innenwinkel eines Dreiecks seien bereits exakt definiert worden. Definieren Sie mathematisch korrekt die Begriffe:

1. rechtwinkliges Dreieck

2. Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks

3. Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks

Aufgabe 3.03

Warum handelt es sich im Folgenden nicht um eine korrekte Definition? Es gibt Dreiecke, die nur spitze Innenwinkel haben, sie heißen spitzwinklige Dreiecke.

Aufgabe 3.04

Für die Schule hat man sich auf eine besondere Art der Bezeichnung der Stücke von Dreiecken geeinigt.

1. Die Innenwinkel werden mit α, β, γ bezeichnet.

2. Die Eckpunkte des Dreiecks werden mit den großen lateinischen Buchstaben A, B, C bezeichnet.

3. Die Dreieckseiten werden mit den kleinen lateinischen Buchstaben a, b, c bezeichnet.

4. Es besteht eine Korrelation zwischen den Bezeichnungen dieser Dreieckstücke und ihrer Lage zueinander.

Definieren Sie den Begriff allgemeine schulübliche Dreieckbezeichnungen.

Aufgabe 3.05

Definieren Sie die Begriffe:

1. gleichschenkliges Dreieck,

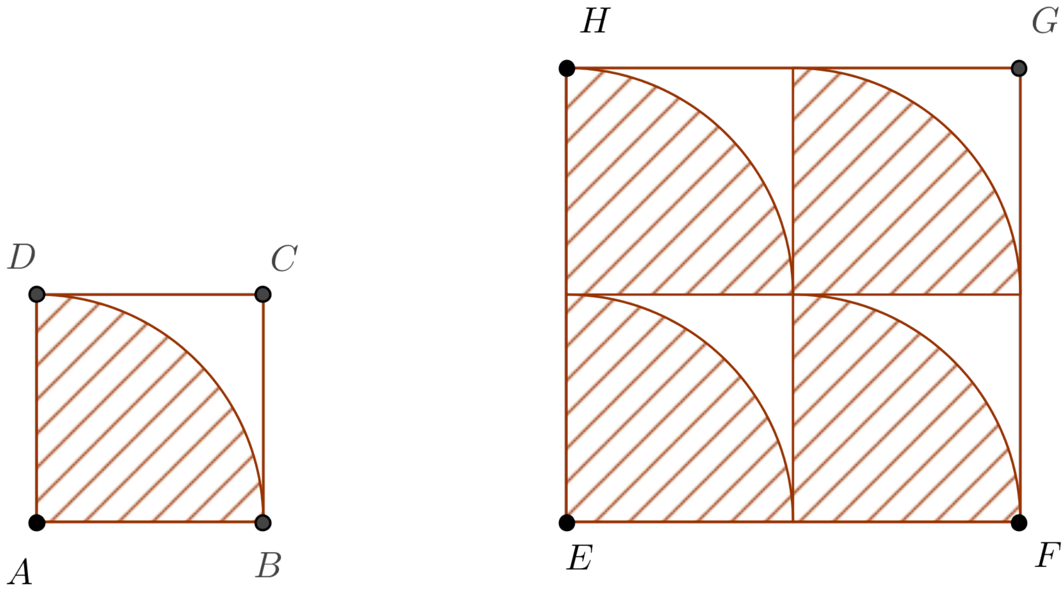
2. Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks,

3. Basis eines gleichschenkligen Dreiecks,

4. Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks.

Implikationen, Begründen und Beweisen

Aufgabe 3.06



$\overline{ABCD}$ und $\overline{EFGH}$ seien Quadrate. Die einzelnen schraffierten Punktmengen seien das Innere von Viertelkreisen.
Beweisen Sie: Der prozentuale Anteil der schraffierten Flächen in Bezug auf die Fläche des jeweiligen Quadrats $\overline{ABCD}$ bzw. $\overline{EFGH}$ ist gleich.

Aufgabe 3.07

Gegeben sei ein Dreieck $\overline{ABC}$ mit dem Umkreis k. Der Mittelpunkt von k möge ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$ sein. Der Winkel $\angle CAB$ habe die Größe $25°$. Berechnen Sie die folgenden Winkelgrößen:

1. $|\angle ACM|$
2. $|\angle AMC|$
3. $|\angle CMB|$
4. $|\angle ABC|$
5. $|\angle MCB|$
6. $|\angle ACB|$

Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Berechnungen außschließlich unter Verwendung der folgenden Sätze:

1. Innenwinkelsatz für Dreiecke

2. Nebenwinkelsatz

3. Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke

Aufgabe 3.08

Formulieren Sie den Satz des Pythagoras in der Form Wenn-Dann. Nennen Sie dann noch einmal explizit die Voraussetzung und die Behauptung des Satzes.

Aufgabe 3.09

Unter der Umkehrung einer Implikation $a \Rightarrow b$ versteht man die Implikation $b \Rightarrow a$ (Voraussetzung und Behauptung werden getauscht).

1. Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes von Pythagoras

2. Entscheiden Sie (ohne Beweis), ob die Umkehrung des Satzes von Pythagoras eine wahre Aussage ist.

3. Oberstudienrätin Schultze-Kröttendörfer läßt ihre 9a die Seiten von Dreiecken vermessen, Quadrate der gemessenen Dreieckseiten bilden, diese Quadrate in geeigneter Weise addieren und vergleichen. Aus diesen Vergleichen sollen die Schüler explizit entscheiden, ob die untersuchten Dreiecke rechtwinklig sind oder nicht. Wenden die Schüler zu dieser Entscheidung den Satz des Pythagoras oder seine Umkehrung an? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 3.10

Der Satz des Pythagoras sei bewiesen. Formulieren Sie nun den Höhensatz des Euklid und beweisen Sie ihn nur unter Verwendung des Satzes von Pythagoras und der Regeln des Rechnens mit reellen Zahlen. (Skizzen helfen)

Serie 4

Aufgabe 4.01

Der Innenwinkelsatz für Dreiecke sei bereits bewiesen.
Formulieren Sie einen analogen Satz für Vierecke und beweisen Sie diesen Satz.

Aufgabe 4.02

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, die größer als 2 ist. Entwickeln Sie eine Abbildungsvorschrift, die jedem solchen n die Innenwinkelsumme des entsprechenden n-Ecks zuordnet. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Vorschrift.

Aufgabe 4.03

a) Wie lautet der Stufenwinkelsatz? (schauen Sie bei Bedarf in Schulbüchern nach).
b) Es seien a und b zwei nicht identische Geraden, die durch eine dritte Gerade c jeweils in genau einem Punkt S geschnitten werden. Bei diesem Schnitt entstehen die Stufenwinkel α und β. Welche der folgenden Aussagen repräsentiert den Stufenwinkelsatz bzw. ist eine zu diesem Satz äuivalente Aussage (Begründen Sie jeweils)?

1. $a||b \Rightarrow \alpha \cong \beta$

2. $\alpha \cong \beta \Rightarrow a||b$

3. $|\alpha| \neq |\beta| \Rightarrow \exists S : S \in a \wedge S \in b$

4. $a||b \Leftrightarrow \alpha \cong \beta$

Aufgabe 4.04

Es seien A und B zwei Punktmengen. Was müssen Sie konkret zeigen, wenn Sie beweisen wollen, dass $A \equiv B$ gilt?

Aufgabe 4.05

Wir gehen davon aus, dass wir der ebenen Geometrie ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt haben. Bezüglich dieses Systems definieren wir die folgenden beiden Punktmengen:

1. $A := \left\{P\left(x_P, y_P\right)|y_p = \frac{3}{4}x_p - \frac{7}{8}\right\}$

2. $B := \left\{P\left(x_P, y_P\right)|y_p = \frac{36{,}3}{48{,}4}x_p - 0{,}875\right\}$

Beweisen Sie $A \cap B = A$.

Aufgabe 4.06

Sie dürfen davon ausgehen, dass für jedes Dreieck gilt: Der größeren zweier Seiten liegt der größere Innenwinkel gegenüber.
(o.B.d.A.: $a > b \Rightarrow |\alpha| > |\beta|$) Formulieren Sie die Umkehrung dieser Seiten-Winkel-Beziehung und beweisen Sie diese Umkehrung mittels eines Widerspruchsbeweises.
(Der Basiswinkelsatz sei auch schon bewiesen.)

Aufgabe 4.07

Definieren Sie den Begriff der Parallelität für Geraden. (Hinweis: Der Mathematiker hat sehr großes Interesse daran, dass die Relation parallel auf der Menge aller Geraden reflexiv ist, d.h. dass jede Gerade zu sich selbst parallel ist.)

Aufgabe 4.08

Gegeben seien in der Ebene ε zwei nicht identische Geraden a und b. Sowohl a als auch b mögen durch eine dritte Gerade c jeweils in genau einem Punkt geschnitten werden. Beweisen Sie: Wenn bei diesem Schnitt kongruente Stufenwinkel entstehen, dann sind a und b parallel zueinander.
Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt, indem Sie annehmen, dass a und b nicht parallel sind. Jetzt dürfen Sie den schwachen Außenwinkelsatz (Jeder Außenwinkel ist größer als jeder nichtanliegende Innenwinkel.) anwenden.

Aufgabe 4.09

Welchen Satz haben Sie mit Aufgabe 4.08 bewiesen?

Aufgabe 4.10

Der Stufenwinkelsatz, der Nebenwinkelsatz und der Scheitelwinkelsatz seien bewiesen. Beweisen Sie jetzt den Wechselwinkelsatz und den Satz über die entgegengesetzt liegenden Winkel an geschnittenen Parallelen.

Serie 5

Aufgabe 5.01

Wir betrachten das folgende Modell $\mathbb{M} := (\mathbb{P}, \mathbb{G}, \text{inz})$ für die Inzidenzgeometrie:
Modellpunkte $\mathbb{P}$:
$\mathbb{P} := \{A, B, C, D\}$

Modellgeraden $\mathbb{G}$:
$\mathbb{G} = \{\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\}\}$
Inzidenz inz:
Elementbeziehung: Ein Punkt P inzidiert mit einer Geraden g , wenn er zu g gehört:
$P \operatorname{inz} g :\Leftrightarrow P \in g$

a) Warum ist $\mathbb{M}$ kein Modell für die ebene Inzidenzgeometrie?

b) Ergänzen Sie $\mathbb{M}$ derart, dass alle Axiome der ebenen Inzidenz erfüllt sind.

Aufgabe 5.02

Die Axiome eines Axiomensystems sollen unabhängig voneinander sein. Was versteht man darunter?

Aufgabe 5.03

Die Axiome eines Axiomensystems sollen widerspruchsfrei sein. Was versteht man darunter?

Aufgabe 5.04

Satz I: Je drei nicht kollineare Punkte sind paarweise verschieden.

1. Wir formulieren Satz I neu und beginnen mit
   „Es seien A, B und C drei Punkte.“ Ergänzen Sie:
   „Wenn A,B und C ... , dann ....“

2. Beweisen Sie Satz I indirekt mittels eines Widerspruchsbeweises.

3. Bilden Sie die Kontraposition von Satz I.

4. Beweisen Sie auch die Kontraposition von Satz I.

5. Formulieren Sie die Umkehrung von Satz I.

6. Gilt auch die Umkehrung von Satz I?

Aufgabe 5.05

Beweisen Sie Satz I.6: Eine Ebene und eine nicht in ihr liegende Gerade haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Aufgabe 5.06

Definieren Sie den Begriff der Komplanarität für Punkte. Ab wieviel Punkte macht der Begriff Sinn? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.07

Man muß jederzeit an Stelle von „Punkten“, „Geraden“, „Ebenen“, „Tische“, „Stühle“, „Bierseidel“ sagen können.
David Hilbert (1862-1943)

Interpretieren Sie die Aussage von Hilbert bezüglich der axiomatischen Geometrie. Hinweis: Der Begriff des Modells hilft.

Aufgabe 5.08

Wir schreiben das Jahr 2022. Sie sind eine gestandene Mathematiklehrerin bzw. ein gestandener Mathematiklehrer. Das Blatt hat sich inzwischen gewendet und die Erleichterungspädagogik (Du magst keine Mathematik, dann sing doch ein Lied, du kannst kein Lied singen, dann bau doch einen Turm, du kannst keinen Turm bauen, dann streichle doch einen Esel, du traust dich nicht einen Esel zu streicheln, .. ist doch egal du bist so autistisch quatsch authentisch ...) ist nicht mehr gesellschaftsfähig. Stattdessen haben Hardcoremathematiker aus China bezüglich des deutschen Mathematikunterrichts das Sagen. Die Lehrmittelverlage (die Pharmaindustrie der Bildung) freuen sich und produzieren neuen Content (hard und soft/ Hauptsache es bringt Geld). Ein Außendienstler von KK erscheint bei Ihnen und möchte Ihnen einen Schülersatz Modelle für die räumliche Inzidenzgeometrie verkaufen: “Schauen Sie mal da hätten wir jeweils drei Flummis als Modellpunkte für die räumliche Inzidenzgeometrie, die können Sie dann auf diese 2 Schaschlikstäbchen, die Modellgeraden stecken. Schüler lieben Flummis und Schaschlik. Natürlich enthalten unsere Flummis krebserregende Weichmacher (da sind wir ganz ehrlich), die entweichen jedoch erst in 123 Jahren. Wenn Sie 10 Klassensätze kaufen, bekommen Sie den 12. umsonst und 10 Gratisexamplare von unserer Firmenzeitschrift „Die Welt von KK“.“

a) Nennen Sie zwei ethisch/moralische Gründe, warum Sie nicht bei dem Außendienstler von KK kaufen.

b) Nennen Sie zwei Gründe aus der Sicht der Fachwissenschaft Mathematik, warum Sie nicht bei dem Außendienstler von KK kaufen.

c) Nennen Sie zwei Gründe aus der Sicht der Didaktik des Faches Mathematik, warum Sie nicht bei dem Außendienstler von KK kaufen.

Aufgabe 5.09

Mario: Jede Gerade hat unendlich viele Punkte.
Marion: Das folgt jedoch nicht aus den Axiomen der Inzidenzgeometrie.
Wer hat Recht? Begründen Sie Ihre Meinung.

Aufgabe 5.10

Es seien A, B, C, D vier paarweise verschiedene Punkte.
Beweisen Sie:
$\text{nKomp}(A, B, C, D) \Rightarrow \text{nKoll}(A, B, C)$.

Serie 6

Aufgabe 6.01

Lena aus der 5a erklärt Ihnen, was eine Strecke ist:
Strecken sind Teile von Geraden. Mein Papa hat mir gesagt, dass die Mathematiker nicht einfach so Teil sondern Teilmenge sagen. Und zu einer Festlegung sagen sie Definition. Ich definiere also:
Eine Teilmenge einer Geraden ist eine Strecke.

a) Formulieren Sie Lenas „Definition“ als Konventionaldefinition.

b) Es ist klar, dass Lenas Definition nicht den formal korrekten Ansprüchen eines Mathematikers genügt. Aber auch im Sinne einer informellen Definition auf Schülerniveau wäre Lenas Definition verbesserunsgwürdig. Skizzieren Sie einen Denkanstoß, den Sie Lena geben würden, damit sie selbst ihre Definition präzisieren kann.

c) Formulieren Sie eine verbesserte Variante von Lenas Definition. Bleiben Sie dabei auf dem Niveau einer informellen Definition.

Aufgabe 6.02

Im Folgenden sind wieder formal korrekte Definitionen verlangt. Zur Verfügung steht Ihnen dazu nur die bisher aufgebaute axiomatische Theorie der Geometrie.

a) Definieren Sie den Begriff offene Strecke.

b) Definieren Sie mittels des Begriffes der offenen Strecke den Begriff der (geschlossenen) Strecke.

c) Was könnte man unter einer halboffenen Strecke verstehen? Formulieren Sie eine entsprechende Definition.

d) Definieren Sie den Begriff Länge einer Strecke.

e) Definieren Sie den Begriff Mittelpunkt einer Strecke.

f) Was könnte man unter den Viertelpunkten einer Strecke verstehen? Definieren Sie den Begriff.

Aufgabe 6.03

Definieren Sie den Begriff Halbgerade AB^+ und Halbgerade AB^-.

Aufgabe 6.04

Es seien M eine Menge und $T_1, T_2, \ldots, T_n$ Teilmengen von M.
Man spricht davon, dass die Zerlegung von M in die Teilmengen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ eine Klasseneinteilung von M ist, wenn Folgendes gilt:

(I) $\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n : T_i \neq \emptyset$

(II) $T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n = M$

(III) $\forall i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j : T_i \cap T_j = \emptyset$

Begründen Sie, warum die Zerlegung einer Geraden AB in die Halbgeraden AB^+ und AB^- keine Klasseneinteilung von AB ist.

Aufgabe 6.05

Es seien A, B und C drei paarweise verschiedene kollineare Punkte. Beweisen Sie, dass genau einer dieser drei Punkte zwischen den anderen beiden dieser drei Punkte liegt.

Aufgabe 6.06

Wir befinden uns in der ebenen Geometrie.
Gegeben seien die beiden Punkte A und B mit $|AB| = 5$.
Konstruieren Sie mit dem Zirkel 12 Punkte
$P_1, P_2, \ldots P_12$, für die gilt: $|AP_i| + |BP_i| = 10$, $1 \leq i \leq 12$.

Aufgabe 6.07

Zeigen Sie, dass für drei paarweise verschiedene Punkte A, B und C gilt:
Wenn $C \in AB^+$ und $|AB| < |AC|$ dann gilt $\mathrm{Zw}(A, B, C)$

Aufgabe 6.08

Definition:Zwei Geraden sind komplanar, wenn es eine Ebene gibt, die beide Geraden vollständig enthält. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Satz *:
Wenn zwei Geraden g und h genau einen Schnittpunkt haben, so sind sie komplanar.

Aufgabe 6.09

Wir betrachten die folgende Menge $\mathbb{P}$ von Modellpunkten:
$\mathbb{P} := \{P_{i,j} | 0 \leq i \leq 9 \wedge 0 \leq j \leq 9\}$.
Auf der Menge der Modellpunkte definieren wir den Abstand zweier Modellpunkte $P_{m,n}$ und $P_{q,r}$:
$|P_{m,n}P_{q,r}| := |m - q| + |n - r|$

Beispiel:
$|P_{3,4}P_{5,1}| := |3-5| + |4-1| = |-2| + |3| = 5$
Untersuchen Sie, ob in dem Modell die Dreiecksungleichung erfüllt ist:
$\forall A, B, C \in \mathbb{P} : |AB| + |BC| \leq |AC|$

Aufgabe 6.10

Wir gehen von dem Modell aus Aufgabe 6.09 aus. Wir betrachten in diesem Modell (ebene Geometrie) einen Kreis k mit dem Mittelpunkt $M := P_{3,3}$ und dem Radius $r = 2$. Zählen Sie alle Punkte auf, die zu k gehören.

Serie 7

Aufgabe 7.01

In einer Übung definierte eine Kommilitonin den Begriff Halbgerade AB^+ wie folgt:

Definition 8 (*Ü*)

> *Halbgerade AB^+*
> $AB^+ := \overline{AB} \cup \{P | P \in AB \wedge |AP| > |BP|\}$

In der Vorlesung wurde wie folgt definiert:

Definition 9 (*V*)

> *Halbgerade AB^+*
> $AB^+ := \overline{AB} \cup \{P | \operatorname{Zw}(A, B, P)\}$

Beweisen Sie:

a) Definition V $\Rightarrow$ Definition Ü

b) Definition Ü $\Rightarrow$ Definition V

Aufgabe 7.02

Luca aus der 5b erklärt Ihnen: Die Hälfte von einer Ebene ist eine Halbebene. Warum ist diese Begriffserklärung von Luca nicht korrekt?

Aufgabe 7.03

Es sei ε eine Ebene und A ein Punkt außerhalb von ε.
Definieren Sie Halbraum εA^+ und Halbraum εA^-.

Aufgabe 7.04

Begründen Sie:
Auf jedem Strahl existiert genau ein Punkt Z, der zu dem Anfangspunkt des Strahls den Abstand $\frac{\pi}{3}$ hat.

Aufgabe 7.05

Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Welche Ergebnisse erzielen Sie nach den folgenden Mengenoperationen?

a) $AB^+ \cap BA^+ =$

b) $AB^- \cap BA^- =$

c) AB geschnitten mit dem Kreis um A durch $B =$

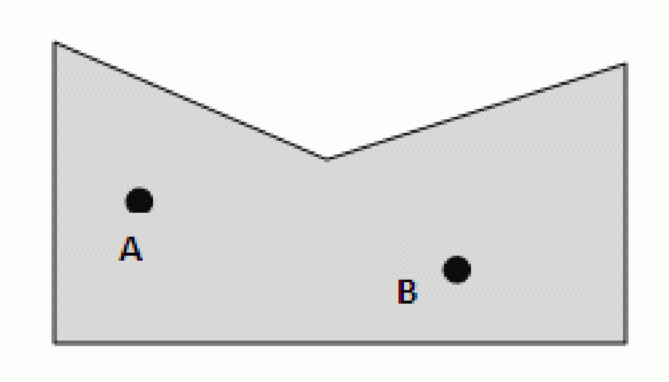
d) $AB \cap BA =$

Aufgabe 7.06

Beweisen Sie, dass keine Strecke existiert, die zwei Mittelpunkte hat.

Aufgabe 7.07

Eine Menge M von Punkten heißt konvex, wenn gilt: $\forall A, B \in M : \overline{AB} \subseteq M$



Student XY argumentiert: "Weil $\overline{AB}$ komplett innerhalb der Punktmenge liegt, ist die obige Figur konvex."
Wo liegt XY's Denkfehler?

Aufgabe 7.08

Definieren Sie den Begriff Halbkreis. (Kreis sei definiert.)

Aufgabe 7.09

Definieren Sie den Begriff Dreieck.
Hinweis: Unter einem Dreieck versteht man seine Seiten.

Aufgabe 7.10

Definieren Sie den Begriff Viereck.
Hinweis: Vereinigungsmenge der Seiten

Serie 8

Aufgabe 8.01

Wenn der Mathematiker von einer Fahne spricht, dann meint er ein Element aus der Menge $\mathbb{F}$, die aus allen Tripeln $(A|AB|AB, Q^+)$ mit $\mathrm{nKoll}(A, B, Q)$ besteht.

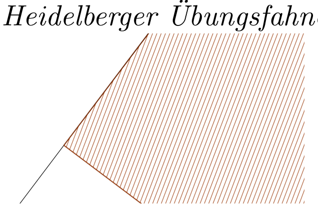
a) Aus was für drei geometrischen Objekten besteht jede Fahne?

b) Ikonisieren Sie den Begriff der Fahne.

c) Erläutern Sie wie der Begriff der Fahne auf *enaktiver Ebene* mit Schülern der SI erarbeitet werden könnte.

Aufgabe 8.02

Die Definition des Begriffs entsprechend Aufgabe 8.01 entspricht der üblichen Vorstellung der Mathematiker von einer Fahne. Am 13.06.2013 fand an der PH Heidelberg eine Geometrieübung statt, in der der Begriff der Fahne durch den Dozenten M.G. unzulässig modifiziert wurde. Er passte den Begriff der Fahne der üblichen Vorstellung einer Fahne an: Gerade mit einer *an ihr befestigten Viertelebene*. Wir wollen diesen Begriff ab sofort offiziell als *Heidelberger Übungsfahne* bezeichnen. Hier eine Ikoniserung des Begriffs *Heidelberger Übungsfahne*.



Die Darstellung ist so zu verstehen, dass die Vereinigungsmenge aller grafisch dargestellten Objekte eine *Heidelberger Übungsfahne* darstellt. Die Schraffur meint dabei den Teil einer Ebene.

a) Formulieren Sie eine Definition des Begriffs *Heidelberger Übungsfahne*.

b) Mit der Formulierung der vorliegenden Aufgabe zeigt der Autor (M.G.) mangelnde mathematikdidaktische Kenntnisse. Warum?

c) Insbesondere ist die ikonische Darstellung der *Heidelberger Übungsfahne* bezüglich der Aufgabenstellung ungünstig. Warum?

Aufgabe 8.03

Was haben Halbgeraden und Halbebenen gemeinsam?
Ergänzen Sie:

a) Eine Gerade wird durch einen .... in zwei .... eingeteilt.

b) Eine Ebene wird durch eine .... in zwei .... eingeteilt.

c) Eine Gerade ist ein .....dimensionales Objekt.

d) Eine Ebene ist ein .....dimensionales Objekt.

e) Im Fall dieser Geradenteilung ist der Trenner ein .....dimensionales geometrisches Objekt.

f) Im Fall dieser Ebenenteilung ist der Trenner ein .....dimensionales geometrisches Objekt.

g) Wenn also n die Dimension des geometrischen Objekts ist, das geteilt wird, dann hat der Trenner die Dimension ..... .

Aufgabe 8.04

Beweisen Sie mittels eines direkten Beweises:
Wenn zwei Mengen M_1 und M_2 konvex sind, dann ist auch ihre Schnittmenge konvex.

Aufgabe 8.05

Beweisen Sie mittels eines indirekten Beweises:
Wenn zwei Mengen M_1 und M_2 konvex sind, dann ist auch ihre Schnittmenge konvex.

Aufgabe 8.06

Formulieren Sie die Umkehrung der Implikation aus Aufgabe 8.05 und untersuchen Sie den Wahrheitswert dieser Umkehrung.

Aufgabe 8.07

Es sei $\overline{ABCD}$ ein konvexes Viereck. Definieren Sie den Begriff Inneres von $\overline{ABCD}$ mittels des Begriffs Vereinigungsmenge.

Aufgabe 8.08

Begründen sie, warum die folgenden Implikationen keine Sätze sind:

a) Die Vereinigungsmenge zweier konvexer Mengen ist konvex.

b) Die Schnittmenge zweier nicht konvexer Mengen ist nicht konvex.

Aufgabe 8.09

Definieren Sie den Begriff regelmäßiges n-Eck.
Hinweis: Der Begriff des Kreises hilft.

Aufgabe 8.10

Es sei g eine Gerade der Ebene ε. Ferner seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte der Ebene ε. Keiner dieser drei Punkte möge zu g gehören. Es gelte: $B \in gA^+$.
Beweisen Sie:

a) $C \in gA^+ \Rightarrow C \in gB^+$

b) $C \in gA^- \Rightarrow C \in gB^-$

Serie 9

Definitionen

Aufgabe 9.01

Definieren Sie den Begriff Nebenwinkel.

Aufgabe 9.02

Definieren Sie den Begriff Scheitelwinkel.

Aufgabe 9.03

Definieren Sie den Begriff Außenwinkel eines Dreiecks $\overline{ABC}$.

Aufgabe 9.04

Definieren Sie den Begriff Stufenwinkel.

Aufgabe 9.05

Definieren Sie den Begriff Wechselwinkel.

Aufgabe 9.06

Eine Winkelhalbierende ist ein Strahl. Ansonsten ist eine Winkelhalbierende das, was ihr Name bereits semantisch verdeutlicht. Definieren Sie den Begriff der Winkelhalbierenden eines Winkels $\angle ASB$

Beweise

Aufgabe 9.07

In der Ebene ε seien eine Gerade g und ein Punkt P mit $P \in g$ gegeben.
Beweisen Sie:

1) $\exists s \subset \varepsilon : P \in s \wedge s \perp g$

2) $s_1 \subset \varepsilon \wedge P \in s_1 \wedge s \perp g \Rightarrow \neg s_2 : s_2 \subset \varepsilon \wedge P \in s_2 \wedge s_2 \perp g \wedge s_2 \not\equiv s_1$

Aufgabe 9.08

Formulieren Sie die Aussagen 1 und 2 aus der vorangegangenen Aufgabe 9.7 als einen einzigen Satz kurz und prägnant derart, dass auch Schüler der SI diesen Satz verstehen können.

Aufgabe 9.09

Beweisen Sie:
Wenn P im Inneren des Winkels $\angle ASB$ liegt, dann ist $|\angle ASP| \leq |\angle ASB|$.

Aufgabe 9.10

Beweisen Sie:
Jeder Winkel hat genau eine Winkelhalbierende.

Serie 10

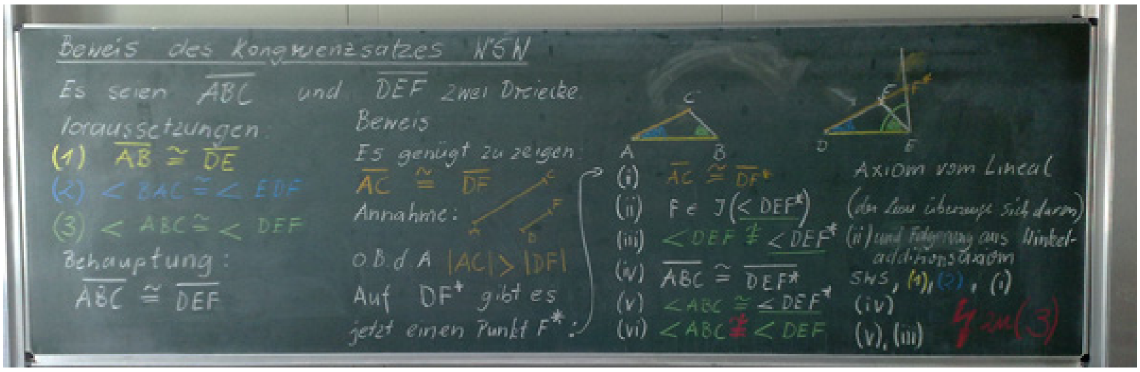
Aufgabe 10.01

Im Mathemooc finden Sie in Chapter 10, G6 eine Folge von fotografierten Tafeln, die den Beweis des Kongruenzsatzes WSW illustrieren.

a) Vollziehen Sie diesen Beweis Schritt für Schritt nach.

b) Beschreiben Sie in Ihren eigenen Worten die Idee, die hinter dem Beweis steckt. Formulieren Sie möglichst einfach, wie der Beweis geführt wird.

Der fotografierte Beweis



Aufgabe 10.02

Definieren Sie den Begriff des gleichschenkligen Dreiecks. Bringen Sie in der Definition die Begriffe Basis, Basiswinkel und Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks unter. Hinweis: Die Schenkel eine Winkels sind Strahlen. Die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind Strecken.

Aufgabe 10.03

Beweisen Sie den Basiswinkelsatz. Ein Arbeitsblatt für den Beweis finden Sie hier: http://tinyurl.com/osb96zg

Aufgabe 10.04

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz 10 (→)

> *Wenn ein Punkt P zur Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ gehört, dann hat er zu den Punkten A und B jeweils ein und denselben Abstand.*

Aufgabe 10.05

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz 11 (←)

> *Wenn ein Punkt P zu den Endpunkten der Strecke $\overline{AB}$ jeweils ein und denselben Abstand hat, so ist er ein Punkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.*

Aufgabe 10.06

Formulieren Sie das Mittelsenkrechtenkriterium als Zusammenfassung der Sätze aus den Aufgaben 10.04 und 10.05.

Aufgabe 10.07

Erläutern Sie, wie und warum sich aus der Lösung von Aufgabe 10.06 eine neue Möglichkeit der Definition des Begriffs der Mittelsenkrechten ergibt.

Aufgabe 10.08

Ihre Schüler sollen aus unterschiedlich langen Holzstäbchen Vierecke legen. Sie stellen folgende Aufgabe:
Lege Vierecke, bei denen gegenüberliegende Seiten jeweils gleichlang sind.

a) Um welche Vierecksart wird es sich immer handeln? Definieren Sie diese Vierecksart so, wie sie sich aufgrund der Tätigkeit der Schüler ergibt. Verwenden Sie als Oberbegriff den Begriff Viereck.

b) Beweisen Sie für die in a) definierte Vierecksart:
Wenn ein Viereck ein/e ...... ist, halbieren sich ihre/seine Diagonalen.
Hinweis: Sie dürfen jetzt für diese Vierecksart nur die Eigenschaften verwenden, die Sie in a) in der Definition angegeben haben.

Aufgabe 10.09

Wieviele verschiedene (bis auf Kongruenz) Parallelogramme können mit dem Heidelberger Winkelkreuz gespannt werden?

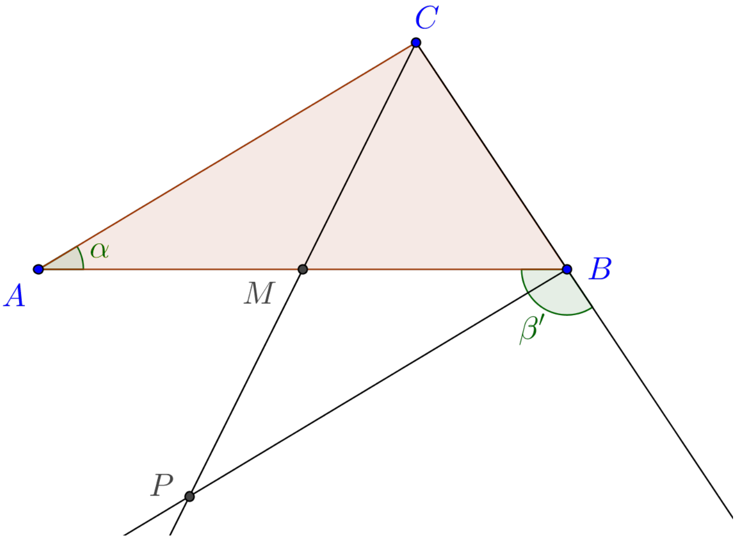
Aufgabe 10.10

Wieviele verschiedene (bis auf Kongruenz) Trapeze können mit dem Heidelberger Winkelkreuz gespannt werden?

Serie 11

Aufgabe 11.01

Im Folgenden beziehen wir uns auf die Beweisführung zum schwachen Außenwinkelsatz. Beweisen Sie, dass der Punkt Pin der offenen Halbebene BC, A^+liegt.



Aufgabe 11.02

Es sei bereits bewiesen, dass der größeren Seite eines Dreiecks auch der größere Winkel gegenüber liegt. Beweisen Sie die Umkehrung dieses Satzes.

Aufgabe 11.03

Beweisen Sie die Existenz und die Eindeutigkeit des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade.

Aufgabe 11.04

Definieren Sie den Begriff Umkreis eines Dreiecks.

Aufgabe 11.05

Beweisen Sie: Jedes Dreieck hat genau einen Umkreis.

Aufgabe 11.06

Formulieren Sie den Stufenwinkelsatz und seine Umkehrung.

Aufgabe 11.07

Beweisen Sie die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes.

Aufgabe 11.08

Unter dem Abstand eines Punktes zu einer Geraden, versteht man die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die Gerade. Beweisen Sie: Wenn ein Punkt P zur Winkelhalbierenden des Winkels α gehört, dann hat P zu den Schenkeln von α jeweils denselben Abstand.

Aufgabe 11.09

Beweisen Sie: Wenn ein Punkt P zu den Schenkeln des Winkels α jeweils denselben Abstand hat, dann gehört P zur Winkelhalbierenden von α.

Aufgabe 11.10

Beweisen Sie die beiden Korollare zum schwachen Außenwinkelsatz.

1. Korollar zum schwachen Außenwinkelsatz
   In jedem Dreieck sind mindestens zwei Innenwinkel spitze Winkel.

2. Korollar zum schwachen Außenwinkelsatz
   Die Summe der Größen zweier Innenwinkel eines Dreiecks ist stets kleiner als 180°.

Serie 12

Aufgabe 12.01

Mark definiert: Es sei $\overline{ABC}$ein rechtwinkliges Dreieck. Die längste Seite von $\overline{ABC}$heißt Hypotenuse von $\overline{ABC}$.
Diskutieren Sie Marks Definition.

Aufgabe 12.02

Definieren Sie die Begriffe Kreistangente, Berührungspunkt einer Kreistangente und Berührungsradius einer Kreistangente.

Aufgabe 12.03

Alles in ein und derselben Ebene:
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ferner seien B ein Punkt von k und t eine Gerade durch B, die senkrecht auf $\overline{MB}$ steht. Beweisen Sie: t ist Tangente an k im Punkt B.

Aufgabe 12.04

Die Gerade t sei Tangente an den Kreis k(Mittelpunkt M) im Punkt B. Beweisen Sie: $t \perp \overline{MB}$.

Aufgabe 12.05

Definieren Sie den Begriff Inkreis eines Dreiecks unter der Verwendung des Begriffs Tangente.

Aufgabe 12.06

Beweisen Sie: Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks $\overline{ABC}$ schneiden sich in genau einem Punkt S, welcher der Mittelpunkt des Inkreises von $\overline{ABC}$ ist.

Aufgabe 12.07

Definieren Sie den Begriff der Höhen eines Dreiecks.

Aufgabe 12.08

Beweisen Sie: Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt.

Aufgabe 12.09

Informieren Sie sich, was Peripheriewinkel (Umfangswinkel) und Zentriwinkel (Mittelpunktswinkel) sind und definieren Sie diese Begriffe.

Aufgabe 12.10

Formulieren Sie den Satz des Thales in Wenn-Dann-Form und beweisen sie ihn.

Lösungen

Lösungen von Serie 1

Lösung von Aufgabe 1.01

Unter dem arithmetischen Mittel der Zahlen a und b versteht man den Quotienten $\frac{a+b}{2}$.

Lösung von Aufgabe 1.02

Unter dem größten gemeinsamen Teiler der natürlichen Zahlen a und b versteht man die größte natürliche Zahl t, die sowohl a als auch b teilt.
Oder auch:

$$\mathrm{ggT}(a,b) = t :\Leftrightarrow t \mid a \wedge t \mid b \wedge \neg\exists c : c \mid a \wedge c \mid b \wedge t \mid c.$$

Lösung von Aufgabe 1.03

Es seien F_1 und F_2 zwei Punkte der Ebene ε. Ferner sei a eine beliebige, dann aber feste positive reelle Zahl. Unter einer Ellipse versteht man die Menge aller Punkte P der Ebene ε mit $|PF_1| + |PF_2| = a$.

Lösung von Aufgabe 1.04

- Den rechten Innenwinkel muss man fordern. Dass alle weiteren Innenwinkel auch Rechte sind, ergibt sich aus den weiteren Eigenschaften.
- Für beliebige Vierecke mit zwei Paaren paralleler Seiten kann man zeigen, dass die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks kongruent zueinander sind.
- Sind umgekehrt die gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks jeweils kongruent zueinander, kann man zeigen, dass sie auch parallel zueinder sind.

Marks Definition ist demnach nicht minimal. Alernativen wären:

1 Ein Rechteck ist ein Viereck mit einem rechten Innenwinkel und zwei Paaren paralleler Seiten.

2 Ein Rechteck ist ein Viereck, das einen rechten Innenwinkel hat und bei dem die gegenüberliegenden Seiten jeweils kongruent zueinander sind.

Lösung von Aufgabe 1.05

Zwei Geraden sind parallel, wenn sie entweder identisch sind oder komplanar und schnittpunktfrei sind.
Zwei Geraden sind windschief, wenn sie nicht parallel und schnittpunktfrei sind.

Lösung von Aufgabe 1.06

Es sei c ein Kreis mit dem Radius r. Die Krümmung k von c berechnet sich zu $k := \frac{1}{r}$.

Lösung von Aufgabe 1.07

z.B. Fahrradfahren auf dem Schulhof mit konstant eingeschlagenem Lenker. (ggf. Lenker arretieren)

Lösung von Aufgabe 1.08

Im Folgenden wird unterstellt, dass die Höhe des Kegels unendlich ist. Ferner sei β der Schnittwinkel zwischen ε_0 und ε.
Wenn $0 \leq \beta < 90° - \frac{\alpha}{2}$ und $S \notin \varepsilon$, dann ist der Schnitt ...

Lösung von Aufgabe 1.09

Kreis in Mittelpunktslage mit Radius r. (s. Sinus und Cosinus am Einheitskreis bzw. am Kreis)

Lösung von Aufgabe 1.10

Es wird mal wieder die leere Menge definiert. Die Quadratwurzel ist für negative Zahlen nicht definiert. Die Bezeichnung Size-Zero-Menge passt also ganz gut.

Lösungen von Serie 2

Lösung von Aufgabe 2.01

1. Dafür, dass t die Summe $a+b$ teilt, ist es `hinreichend aber nicht notwendig`, dass t sowohl a als auch b teilt. $(t, a, b \in \mathbb{N})$

2. Dafür, dass $\overline{ABCD}$ ein Rechteck ist, ist es `weder notwendig noch hinreichend`, dass $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ gilt.

3. Dafür, dass ein Dreieck $\overline{ABC}$ rechtwinklig ist, ist es `notwendig aber nicht hinreichend`, dass kein Innenwinkel von $\overline{ABC}$ größer als 90° ist.

4. Dafür, dass ein Dreieck $\overline{ABC}$ stumpfwinklig ist, ist es `notwendig und hinreichend`, dass ein Innenwinkel von $\overline{ABC}$ größer als 90° ist.

5. Dafür, dass ein Dreieck rechtwinklig ist, ist es `notwendig und hinreichend`, dass der Mittelpunkt seines Umkreises der Mittelpunkt einer seiner Seiten ist.

6. Dafür dass ein Viereck ein Rechteck ist, ist es `weder notwendig noch hinreichend`, dass alle seine Seiten gleichlang sind.

7. Dafür dass ein Viereck ein Rechteck ist, ist es `hinreichend aber nicht notwendig`, dass es einen rechten Innenwinkel hat und alle seine Seiten gleichlang sind.

Lösung von Aufgabe 2.02

1. Dafür, dass $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ gilt, ist es hinreichend aber nicht notwendig, `dass` $\overline{ABCD}$ `ein Rechteck ist.`

2. Dafür, dass $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ gilt, ist hinreichend und notwendig, `dass` $\overline{ABCD}$ `einen Umkreis hat.`

3. Dafür, dass $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ gilt, ist es notwendige aber nicht hinreichend, dass $\overline{ABCD}$ `ein Paar zueinander kongruenter Seiten hat.`

4. ein Kriterium dafür, dass $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ gilt: siehe 2. ein Kriterium ist eine hinreichende und notwendige Bedingung.

Lösung von Aufgabe 2.03

1 Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten kongruent zueinander sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

2 Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten parallel zueinander sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Lösung von Aufgabe 2.04

1 Spanne ein Viereck $\overline{ABCD}$ derart, dass A auf Schenkel 1, B auf Schenkel 2, C auf Schenkel 3 und D auf Schenkel 4 liegt. Ferner mögen die Stifte für A und C und die Stifte für B und D jeweils dieselbe Farbe haben.

2 Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen gegenseitig halbieren, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

Lösung von Aufgabe 2.05

1. Falte das Blatt derart, dass der Punkt A mit dem Punkt B zur Deckung kommt.

2. Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die Symmetrieachse der Strecke, auf der nicht die Endpunkte der Strecke liegen.

Lösung von Aufgabe 2.06

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck. Zeichnet man um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten von $\overline{ABC}$ einen Kreis durch den Punkt A, dann erhält man mit diesem Kreis den Umkreis von $\overline{ABC}$.

Lösung von Aufgabe 2.07

Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn sich sein Diagonalen schneiden.

Lösung von Aufgabe 2.08

Inneres der Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius s.

Lösung von Aufgabe 2.09

1. $M \cup N := \{e | e \in M \vee e \in N\}$
2. $M \cap N := \{e | e \in M \wedge e \in N\}$

Lösung von Aufgabe 2.10

Unter einem Drehellipsoid versteht man die Menge aller Punkte P,
mit $|PF_1| + |PF_2| = a$

Lösungen von Serie 3

Lösung von Aufgabe 3.01

1. Wenn die Größe eines Winkels α kleiner als 90° ist, dann ist α ein spitzer Winkel.
2. Wenn die Größe eines Winkels α 90° beträgt, dann ist α ein rechter Winkel.
3. Wenn die Größe eines Winkels α kleiner als 90° ist, dann ist α ein stumpfer Winkel.

Lösung von Aufgabe 3.02

1. Wenn ein Dreieck einen rechten Innenwinkel besitzt, dann wird das Dreieck rechtwinkliges Dreieck genannt.
2. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist die Seite des rechtwinkligen Dreiecks, zu der nicht der Scheitel des rechten Innenwinkels gehört.
3. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind die Seiten dieses Dreiecks, die nicht die Hypotenuse sind.

Lösung von Aufgabe 3.03

Es gibt Dreiecke ist ein Existenzaussage, die zu beweisen wäre. Definitionen sind keine Aussagen (sind weder wahr noch falsch).

Lösung von Aufgabe 3.04

Die schulüblichen Bezeichnungen eines Dreiecks wurden wie folgt festgelegt:

(I) Die Eckpunkte des Dreiecks werden in mahematisch positivem Umlaufsinn mit den großen lateinischen Buchstaben A, B und C bezeichnet.

(II) Die Seite, die dem Punkt A gegenüberliegt wird a genannt, b ist die Seite, die dem Punkt B gegenüberliegt und die dem Punkt C gegenüberliegende Seite wird mit c bezeichnet.

(III) Der Innenwinkel mit dem Scheitel A wird α genannt, der Innenwinkel mit dem Scheitel B wird β genannt und schließlich wird der Innenwinkel mit dem Scheitel C mit γ bezeichnet.

Lösung von Aufgabe 3.05

1. Ein Dreieck mit zwei gleichlangen Seiten heißt gleichschenkliges Dreieck.
2. Die beiden gleichlangen Seiten heißen Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks.
3. Die dritte Seite heißt Basis des gleichschenkligen Dreiecks.
4. Die Innenwinkel, deren Scheitel die Endpunkte der Basis sind, heißen Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks.

Lösung von Aufgabe 3.06

- Es sei $\overline{ABCD}$ ein Quadrat und k_4 ein eingebetteter Viertelkreis entsprechend obiger Skizze.
- Der Radius von k_4 ist die Seitenlänge von $\overline{ABCD}$ und möge die Länge a haben.
- Der Flächeninhalt A_4 von k_4 berechnet sich zu $A_4 = \frac{\pi}{4}a^2$.
- Der Flächeninhalt A_Q des Quadrates berechnet sich zu$A_Q = a^2$.
- Der Anteil des Viertelkreises am Flächeninhalt des Quadrates berechnet sich zu $\frac{A_4}{A_Q} = \frac{\frac{\pi}{4}a^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}$
- Der Anteil der Fläche des Viertelkreises an der Fläche des Quadrates ist von der Seitenlänge des Quadrates unabhängig.

- Bei vier kongruenten Qudraten mit entsprechenden Viertelkreisen berechnet sich der Anteil der Fläche der Kreise zur Fläche der Quadrate wie folgt: $\frac{4 \cdot A_4}{4 \cdot A_Q} = \frac{\pi \cdot a^2}{4 \cdot a^2} = \frac{\pi}{4}$. (Wäre auch einfacher gegangen.)

Bei praktischen Problemen (Holzlagerung, Viertelstamm, schätzen wir mit $\frac{3}{4} = 75\%$ ab.

Lösung von Aufgabe 3.07

1. $|\angle ACM| = |\angle CAB| = 25°$ (Basiswinkelsatz)
2. $|\angle AMC| = 180° - 2 \cdot 25° = 130°$ (Innenwinkelsatz)
3. $|\angle CMB| = 180° - 130° = 50°$ (Nebenwinkelsatz)
4. $|\angle ABC| = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$ (Innenwinkelsatz, Basiswinkelsatz).
5. $|\angle MCB| = |\angle ABC| = 65°$ (Basiswinkelsatz)
6. $|\angle ACB| = |\angle MCB| + |\angle ACM| = 65° + 25° = 90°$

Lösung von Aufgabe 3.09

1. Wenn die Summe der Quadrate der Längen der beiden kürzeren Seiten eines Dreiecks gleich dem Quadrat der Länge der längsten Seite dieses Dreiecks ist, dann ist das Dreieck gleichschenklig.
2. Sie ist wahr. Der Satz des Paythagoras und seine Umkehrung sind ein Kriterium dafür, ob Dreiecke rechtwinklig sind.
3. Aus den Seitenlängen wird explizit auf den rechten Winkel geschlossen: Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

Lösung von Aufgabe 3.10

Es seien a und b die beiden Katheten, die Hypotenuse sei c. Die Höhe h_c wollen wir kurz h nennen. Die beiden Hypotenusenabschnitte seien q und p.

$$\begin{aligned} h^2 + p^2 &= b^2 && (0.1) \\ h^2 + q^2 &= a^2 && (0.2) \\ c^2 &= a^2 + b^2 && (0.3) \\ c^2 &= h^2 + p^2 + h^2 + q^2 && (0.4) \\ (q+p)^2 &= h^2 + p^2 + h^2 + q^2 && (0.5) \\ q^2 + 2qp + p^2 &= h^2 + p^2 + h^2 + q^2 && (0.6) \\ 2qp &= 2h^2 && (0.7) \\ qp &= h^2 && (0.8) \end{aligned}$$

Lösungen von Serie 4

Lösung von Aufgabe 4.01 S SoSe$_1$3

Satz: (Innenwinkelsumme in Vieecken)
In jedem Vierecke beträgt die Summe der Größen der Innenwinkel 360°.

Beweis:
Es sei $\overline{ABCD}$ ein Viereck. Wir wählen die Diagonale von $\overline{ABCD}$, die in seinem Inneren liegt. Es sei dieses o.B.d.A. die Diagonale $\overline{AC}$.
Die Innenwinkelsumme $IWS\left(\overline{ABCD}\right)$ von $\overline{ABCD}$ läßt sich jetzt wie folgt darstellen:

$$IWS\left(\overline{ABCD}\right) = (|\angle BAC| + |\angle ABC| + |\angle BCA|) + (|\angle ACD| + |\angle CDA| + |\angle DAC|)$$
$$IWS\left(\overline{ABCD}\right) = 180^\circ + 180^\circ (\text{Innenwinkelsumme im Dreieck})$$
$$IWS\left(\overline{ABCD}\right) = 360^\circ$$

Lösung von Aufgabe 4.02 S SoSe$_1$3

Die Funktion $IWS(n)$ möge jedem entsprechenden $n-$ Eck seine Innenwinkelsumme zuordnen.
Es sei $n > 2$

$$\begin{aligned}
IWS(n) &= IWS(n-1) + 180^\circ \\
IWS(n) &= IWS(n-2) + 180^\circ + 180^\circ \\
IWS(n) &= IWS(n-3) + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ \\
&\ldots \\
IWS(n) &= IWS(3) + 180^\circ + 180^\circ + \ldots + +180^\circ \\
IWS(n) &= (n-2) \cdot +180^\circ
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 4.03

a) Satz:
Wenn zwei nichtidentische parallele Geraden a und b jeweils durch eine dritte Gerade c geschnitten werden, dann sind die bei diesem Schnitt entstehenden Stufenwinkel kongruent zueinander.

b)
1. Stufenwinkelsatz
2. Umkehrung des Stufenwinkelsatzes
3. Kontraposition des Stufenwinkelsatzes (Aus α nicht kongruent β folgt, dass die beiden Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben bzw. nicht parallel zueinender sind.)
4. Da sowohl der Stufenwinkelsatz als auch seine Umkehrung wahre Aussagen sind gilt $a||b \Leftrightarrow \alpha \cong \beta$. Diese Äquivalenz beinhaltet den Stufenwinkelsatz, sagt aber mehr aus als dieser und ist damit nicht dem Stufenwinkelsatz gleichzusetzen.

Lösung von Aufgabe 4.04

$$\forall a \in A : a \in B$$
$$\forall b \in B : b \in A$$

Lösung von Aufgabe 4.05

zu zeigen: $\forall P \in A : P \in B$

(I) Sei $P\,(x, y) \in A$

(II) $P\,(x, y) \in A \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}$ (Definition der Menge A)

(III) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 121}{4 \cdot 121} = \frac{\frac{3 \cdot 121}{10}}{\frac{4 \cdot 121}{10}} = \frac{36{,}3}{48{,}4}$ (elementares Rechnen)

(IV) $\frac{7}{8} = 0,875$ (elementares Rechnen)

(V) $\frac{3}{4}x - \frac{7}{8} = \frac{36{,}3}{48{,}4}x - 0,875$ ((III), (IV))

(VI) $y = \frac{36{,}3}{48{,}4}x - 0,875$ ((V), (II))

(VII) $P(x, y) \in B$ ((VI), Definition von B)

Lösung von Aufgabe 4.06

Es seien a und b die Seiten eines Dreiecks. Der Seite a möge der Winkel α und der Seite b der Winkel β gegenüberliegen. Die Umkehrung der obigen Implikation lautet: Dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber bzw.
$|\alpha| > |\beta| \Rightarrow |a| > |b|$

- **Voraussetzung:**
  $|\alpha| > |\beta|$
- **Behauptung:**
  $|a| > |b|$
- **Annahme:**
  $|a| \leq |b|$
- **Beweis:**
  1. Fall: $|a| = |b|$
     In diesem Fall wären nach dem Basiswinkelsatz die beiden Winkel α und β kongruent zueinander, was ein Widerspruch zur Voraussetzung wäre.
  2. Fall: $|a| < |b|$
     In diesem Fall wäre nach der bereits bewiesenen Seiten-Winkel-Beziehung (Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.) der Winkel α kleiner als der Winkel β. Auch dieses wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung $|\alpha| > |\beta|$.

Lösung von Aufgabe 4.07

Definition 12 (*Parallelität auf der Menge der Geraden*)

> *Wenn zwei Geraden in ein und derselben Ebene liegen und entweder identisch oder schnittpunktfrei sind, dann sind die beiden Geraden parallel zueinander.*

Lösung von Aufgabe 4.08

Es seien a und b zwei komplanare nichtidentische Geraden, welche durch die Gerade c jeweils in genau einem Punkt geschnitten werden. Es gelte $a \cap c = \{A\} \wedge b \cap c = \{A\}$. Ferner seien α und β ein Paar von Stufenwinkeln, dass beim Schnitt von c mit a und b entsteht.

- **Voraussetzung:**
  $\alpha \cong \beta$
- **Behauptung:**
  $a||b$
- **Annahme:**
  $\exists C : \{C\} = a \cap b$
  1. Fall: Einer der beiden Winkel α und β ist Innenwinkel von $\overline{ABC}$.
     In diesem Fall ist jeweils der andere der beiden Winkel nichtanliegender Außenwinkel und damit kann nach dem schwachen Außenwinkelsatz nicht $\alpha \cong \beta$ gelten.
  2. Fall: Keiner der beiden Winkel α und β ist Innenwinkel von $\overline{ABC}$.
     Sei o.B.d.A. β Außenwinkel von $\overline{ABC}$. Der Scheitelwinkel α' von α ist jetzt bezüglich β nichtanliegender Innenwinkel von $\overline{ABC}$. Nach dem schwachen Außenwinkelsatz gilt jetzt $|\beta| < |\alpha'|$. Nach dem Scheitelwinkelsatz git $|\alpha'| = |\alpha|$. Unter Berücksichtigung von $|\beta| < |\alpha'|$ folgt jetzt unmittelbar, dass $|\beta| > |\alpha|$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\alpha \cong \beta$.

Lösung von Aufgabe 4.09

Die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes wurde bewiesen.

Lösung von Aufgabe 4.10

Es seien a und b zwei nichtidentische komplanare Geraden, die durch die dritte Gerade c jeweils in genau einem Punkt geschnitten werden mögen. Bei diesem Schnitt mögen das Wechselwinkelpaar α und β und das Paar entgegengesetzt liegender winkel γ und δ entstehen.

- Beweis des Wechselwinkelsatzes:
  zu zeigen: $\alpha \cong \beta$
  betrachten β' Scheitelwinkel von β

(I) $\beta \cong \beta'$ (Scheitelwinkelsatz)

(II) $\alpha \cong \beta'$ (Stufenwinkelsatz)

(III) $\alpha \cong \beta$ (((I), (II))

- Beweis des Satzes über die entgegengesetzt liegenden Winkel:
  zu zeigen: $|\gamma| + |\delta| = 180°$
  betrachten δ' den Nebenwinkel von δ, der Stufenwinkel zu γ ist

(I) $|\delta| + |\delta'| = 180°$ (Nebenwinkel sind supplementär)

(II) $|\gamma| = |\delta'|$ (Stufenwinkelsatz)

(III) $|\gamma| = |\delta|$ ((I), (II))

Lösungen von Serie 5

Lösung von Aufgabe 5.01

Das Modell besteht aus 4 Modellpunkten, den Punkten A, B, C, D. Nach Axiom $I/1$ muss durch je zwei Punkte genau eine Gerade gehen. Das wären bei 4 Punkten genau 6 Geraden. Das Modell beinhaltet jedoch nur 5 Modellgeraden. Es fehlt die Gerade $\{C, D\}$.

Lösung von Aufgabe 5.02

Eine Menge von Axiomen $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ist unabhängig wenn für kein $i \leq n$ gilt: A_i ist Folgerung aus $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \setminus \{A_i\}$.

Lösung von Aufgabe 5.03

Ein Axiomensystem $\mathbb{A}$ ist widerspruchsfrei, wenn es keine Aussage A gibt, für die gilt: A ist Folgerung aus $\mathbb{A}$ und $\neg A$ ist Folgerung aus $\mathbb{A}$.

Lösung von Aufgabe 5.04

1. „Es seien A, B und C drei Punkte."
   „Wenn A,B und C nicht zu ein und derselben Geraden gehören , dann sind sie paarweise verschieden."

2. Voraussetzung: nKoll(A, B, C)
   `Behauptung:` $A \not\equiv B \not\equiv C \not\equiv A$
   `Annahme:` o.B.d.A. $A \equiv B$
   `Beweisführung:` Durch B und C geht nach Axiom $I/1$ genau eine Gerade. Zu dieser Geraden gehören B und C und da A und B identisch sind auch der Punkt A: Koll(A, B, C): $\lightning$ zur Voraussetzung.

3. Wenn von drei Punkten zwei identisch sind, dann sind die drei Punkte kollinear.

4. Es seien A, B, C drei Punkte mit
   Voraussetzung: $A \equiv B$.
   Behauptung: Koll(A, B, C)
   Beweis: Durch B und C geht nach Axiom $I/1$ genau eine Gerade. Zu dieser Geraden gehören B und C und da A und B identisch sind auch der Punkt A.

5. Wenn drei Punkte paarweise verschieden sind, dann sind diese Punkte nicht kollinear.

6. Nein, drei paarweise verschiedene Punkte können selbstverständlich auch zu ein und derselben Geraden gehören.

Lösung von Aufgabe 5.05

Es seien ε eine Ebene und g eine Gerade.
Voraussetzung: g liegt nicht vollständig in ε
Fall 1: $g \cap \varepsilon = \emptyset$, alles ist in Ordnung
Fall 2: g und ε haben genau einen Punkt P gemeinsam: alles ist in Ordnung
Annahme: $\exists P, Q : P \not\equiv Q \wedge g \cap \varepsilon = \{P, Q\}$
Beweisführung: Nach Axiom $I/5$ liegt g vollständig in ε: $\lightning Voraussetzung.$

Lösung von Aufgabe 5.06

Eine Menge M von Punkten heißt komplanar, wenn es eine Ebene ε gibt, in der alle Punkte aus M liegen:
$Komp(M) :\Leftrightarrow \exists \varepsilon : \forall P \in M : P \in \varepsilon.$
Besteht M aus einem Punkt oder ist M zwei- bzw. dreielementig, dann ist M auf jeden Fall komplanar. Erst Mengen mit mehr als drei Elementen können nicht komplanar sein. Daher macht der Begriff der Komplanariatätnur für Mengen mit mehr als drei Elementen Sinn.

Lösung von Aufgabe 5.07

Punkte, Geraden und Ebenen sind mathematische Objekte. Als solche existieren sie nicht in Form von materiell/stofflichen Objekten. Stoffliche Modelle helfen, die mathematischen Objekte Punkt, Gerade und Ebene zu veranschaulichen. So können in gewissen Modellen die Punkte Objekte aus Knete sein etc.. Jedes Modell für unsere Punkte, Geraden und Ebenen und deren Beziehungen untereinander sind gleichberechtigt (insofern sie korrekte Modelle sind). Insofern könnten auch Stühle, Tische und Bierseidel als Modelle für die Geometrie dienen.

Lösung von Aufgabe 5.08

a) ...

b) Axiom $I/7$ fordert die Existenz von wenigstens vier paarweise verschiedenen Punkten. Die drei Flummis als Modellpunkte sind damit nicht ausreichend. Durch je zwei dieser Punkte muss genau eine Gerade gehen. Das Modell müsste dementsprechend aus wenigstens sechs Geraden bestehen. Zwei Schalikstäbchen als Modellgerade sind somit nicht ausreichend.

c) Da das Flummi/Schaschlikstäbchenmodell die Inzidenzgeometrie nicht korrekt abbildet, ist es auch aus didaktischer Sicht nicht geeignet. Ferner ist es wohl sinnvoller, dass die Schüler ihre eigenen Modelle generieren.

Lösung von Aufgabe 5.09

Natürlich haben beide Recht. In der Euklidischen Geometrie besteht jede Gerade aus überabzählbar unendlichen vielen Punkten. Weil es jedoch Modelle für die Inzidengeometrie gibt, in denen jede Gerade aus genau zwei Punkten und das Modell selbst nur aus vier Punkten besteht, ist es nicht möglich, nur aus den Axiomen der Inzidenz die Existenz von unendlich vielen Punkten zu folgern. Diesbezüglich wird es weiterer Axome bedürfen.

Lösung von Aufgabe 5.10

Voraussetzung: nKomp(A, B, C, D)
Behauptung: nKoll(A, B, C)
Annahme: Koll(A, B, C)
Beweisführung:
Fall 1:
D liegt nicht auf BC.
Nach Axiom $I/4$ gibt es jetzt eine Ebene ε in der die Punkte B, C, D liegen.
Weil zwei Punkte der Geraden BC in ε liegen, gehört nach $I/5$ auch der Punkt A als Punkt von BC zu ε.
Also: Komp(A, B, C, D) $\lightning$ Voraussetzung
Fall 2:
Koll(A, B, C, D)
$I/3$ liefert einen Punkt E, der nicht auf BC liegt, weiter wie im Fall 1 ...

Lösungen von Serie 6

Lösung von Aufgabe 6.01

a) Wenn eine Menge von Punkten eine Teilmenge einer Geraden ist, dann ist diese Menge eine Strecke.

b) Denkanstoß:

c) Eine Strecke ist eine Menge von Punkten einer Geraden mit Anfang und Ende und ohne Lücken.

Lösung von Aufgabe 6.02

a) Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Unter der offenen Strecke $]AB[$ versteht man die Menge aller Punkte, die zwischen den Punkten A und B liegen.

b) $\overline{AB} :=]AB[\cup\{A,B\}$

c) eine halboffene Strecke ist die Menge der Punkte einer Strecke ohne jeweils eine der beiden Endpunkte der Strecke.

d) Die Länge einer Strecke ist der Abstand der Endpunkte der Strecke: $|\overline{AB}| := |AB|$.

e) Wenn ein Punkt M einer Strecke $\overline{AB}$ zu den Endpunkten A und B jeweils denselben Absatnd hat, so ist M Mittelpunkt von $\overline{AB}$.
(M ist Mittelpunkt von $\overline{AB} :\Leftrightarrow M \in AB \wedge |MA| = |MB|$)

f) Der Punkt V ist ein Viertelpunkt der Strecke $\overline{AB} :\Leftrightarrow 4|AV| = |AB| \wedge V \in \overline{AB}$.

Lösung von Aufgabe 6.03

$AB^+ := \overline{AB} \cup \{P|\,\mathrm{Zw}(A,B,P)\}$
$AB^- := (AB \backslash AB^+) \cup \{A\}$

Lösung von Aufgabe 6.04

$AB^+ \cap AB^- = \{A\} \neq \emptyset$

Lösung von Aufgabe 6.05

Voraussetzung:

$\mathrm{koll}(A,B,C) \wedge A \not\equiv B \not\equiv C \not\equiv A$

Behauptung 1: (Existenzaussage)

Es existiert eine Punkt aus der Menge der drei Punkte A, B, der zwischen den beiden anderen Punkten dieser Menge liegt:
$\mathrm{Zw}(A, B, C) \vee \mathrm{Zw}(A, C, B) \vee \mathrm{Zw}(B, A, C)$.

Behauptung 2: (Eindeutigkeitsaussage)

Es liegt höchstens einer der drei Punkte A, B, C zwischen den beiden anderen.
bzw.
Wenn einer der drei Punkte A, B, C zwischen den beiden anderen liegt, dann liegt kein weiterer Punkt aus der Menge $\{A, B, C\}$ zwischen den jeweils beiden anderen:
$\mathrm{Zw}(A, B, C) \Rightarrow \neg(\mathrm{Zw}(A, C, B) \vee \mathrm{Zw}(B, A, C))$

Beweis der Existenzaussage:

Im Axiom von der Dreiecksungleichung wird ausgesagt, dass für je drei kollineare Punkte A, B, C immer wenigstens eine der folgenden drei Gleichungen gilt:

$$\begin{array}{rc} \text{(I)} & |AB| + |BC| = |AB| \\ \text{(II)} & |AC| + |CB| = |AB| \\ \text{(III)} & |BA| + |AC| = |BC| \end{array}$$

Entsprechend der Definition der Zwischenrelation bedeutet

$$|AB| + |BC| = |AB| \vee |AC| + |CB| = |AB| \vee |BA| + |AC| = |BC|$$

, dass

$$\mathrm{Zw}(A, B, C) \vee \mathrm{Zw}(A, C, B) \vee \mathrm{Zw}(B, A, C)$$

gilt.

Beweis der Eindeutigkeitsaussage:

Wir wissen jetzt, dass wenigstens einer der drei Punkte A, B, C zwischen den beiden anderen liegt. Sei dieses o.B.d.A. der Punkt B.
Wir zeigen zunächst:

$$\mathrm{Zw}(A, B, C) \Rightarrow \neg\, \mathrm{Zw}(A, C, B)$$

V: $\mathrm{Zw}(A, B, C)$

B: $\neg\, \mathrm{Zw}(A, C, B)$

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass obwohl bereits B zwischen A und C liegt, auch der Punkt C zwischen A und B liegt.

A: $\mathrm{Zw}(A, C, B)$

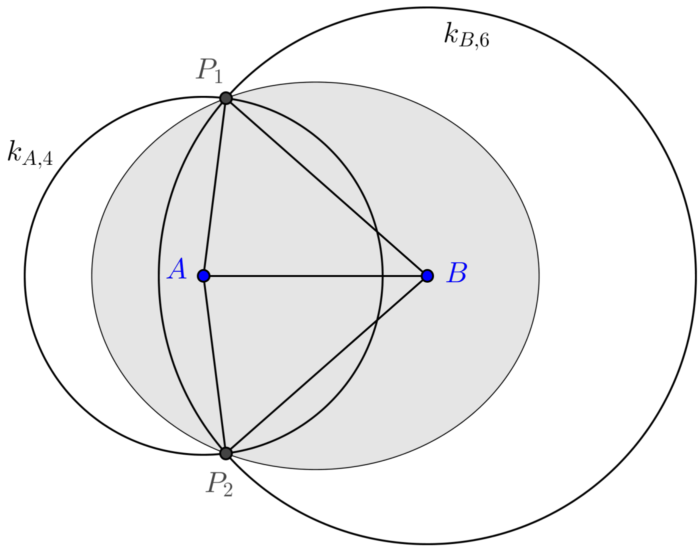
(1)	$\lvert AB\rvert + \lvert BC\rvert$	$=$	$\lvert AC\rvert$	V, Definition „Zwischen“
(2)	$\lvert AC\rvert + \lvert CB\rvert$	$=$	$\lvert AB\rvert$	A, Definition „Zwischen“
(3)	$\lvert AB\rvert + \lvert BC\rvert + \lvert CB\rvert$	$=$	$\lvert AB\rvert$	(1), (2)
(4)	$\lvert BC\rvert + \lvert CB\rvert$	$=$	0	(3), $-\lvert AB\rvert$ auf beiden Seiten
(5)	$\lvert BC\rvert + \lvert BC\rvert$	$=$	0	(4), Axiom II.2
(6)	$2 \cdot \lvert BC\rvert$	$=$	0	(5)
(7)	$\lvert BC\rvert$	$=$	0	(6), auf beiden Seiten $:2$
(8)	B	$\equiv$	C	(7), Axiom II.1

$B \equiv C$ ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $B \not\equiv C$. Unsere Annahme ist dementsprechend zu verwerfen.
Der Beweis für

$$\mathrm{Zw}(A,B,C) \Rightarrow \neg\,\mathrm{Zw}(B,A,C)$$

lässt sich analog führen.

Lösung von Aufgabe 6.06



1. Zeichne einen Kreis um A mit dem Radius 4.
2. Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius 6.
3. Die Schnittpunkte der beiden Kreise erfüllen das Verlangte.

4. ...
5. Zeichne einen Kreis um A mit dem Radius r.
6. Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius $10 - r$.
7. Die Schnittpunkte der beiden Kreise erfüllen das Verlangte.
8. ...

Aufgabe 6.07

Zeigen Sie, dass für drei paarweise verschiedene Punkte A, B und C gilt:
Wenn $C \in AB^+$ und $|AB| < |AC|$ dann gilt $\mathrm{Zw}(A, B, C)$

Lösung von Aufgabe 6.07

Voraussetzung 1

$A \not\equiv B \not\equiv C \not\equiv A$

Voraussetzung 2

$C \in AB^+$

Voraussetzung 3

$|AB| < |AC|$

Vorüberlegungen

AB^+ ist wie folgt definiert: $AB^+ := \{P|\,\mathrm{Zw}(APB) \vee \mathrm{Zw}(ABP)\} \cup \{A, B\}$. Wegen $C \in AB^+$ sind die drei Punkte A, B, C kollinear. Nach Voraussetzung sind die drei Punkte A, B, C paarweise verschieden. Entsprechend der Lösung von Aufgabe 6.05 liegt genau einer der drei Punkte A, B, C zwischen den beiden anderen. Berücksichtigen wir die obige Definition der Halbgeraden AB^+ kann nur genau einer der beiden folgenden Fälle auftreten.

1. Fall: $\mathrm{Zw}(ACB)$
2. Fall: $\mathrm{Zw}(ABC)$

Behauptung

$\mathrm{Zw}(ABC)$ (2. Fall) haben wir zu zeigen.

Annahme:

Der erste Fall tritt ein: $\mathrm{Zw}(ACB)$.

Beweis

$$
\begin{array}{lrll}
\text{(I)} & |AC| + |CB| = & |AB| & \text{Annahme} \\
\text{(II)} & |AC| < & |AB| & \text{(I), Abstände sind immer positiv}
\end{array}
$$

$$|AC| < |AB|$$

ist ein Widerspruch zur Voraussetzung 3

$$|AC| > |AB|.$$

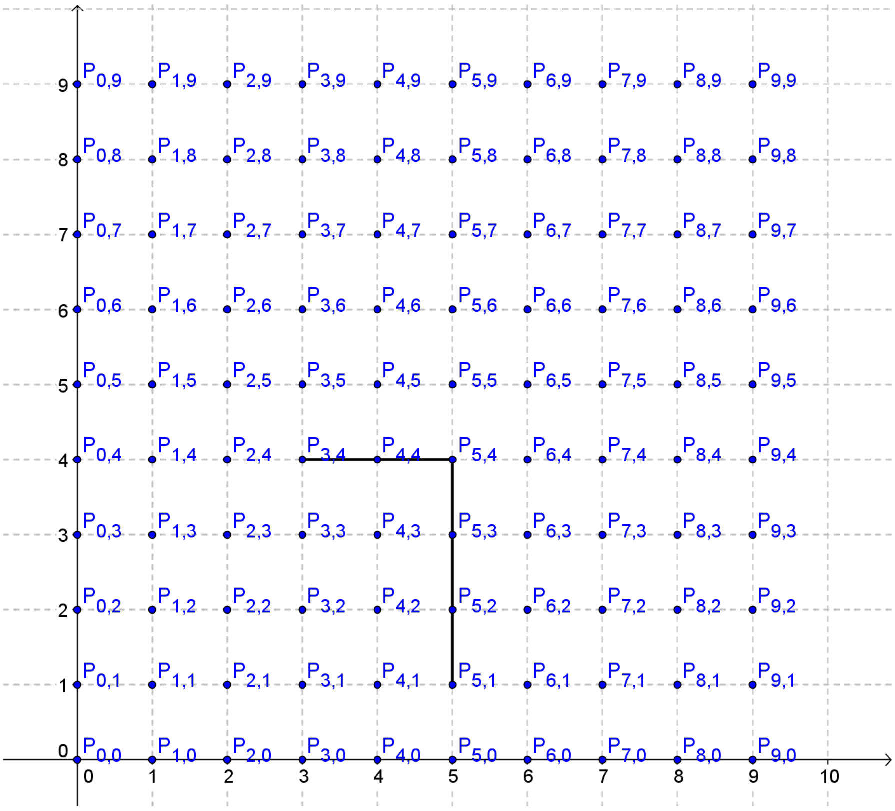
Unsere Annahme ist zu verwerfen und der zweite Fall muss damit eintreten.

Lösung von Aufgabe 6.08

Es seien g und h zwei Geraden, die sich in S und nur in S schneiden. Nach dem Inzidenzaxiom I.2 gibt es auf g einen weiteren von S verschiedenen Punkt G. Ebenso gibt es nach dem Inzidenzaxiom I.2 einen weiteren von S verschiedenen Punkt H. Die Punkte H und G können nicht identisch sein, da g und h sonst mehr als nur den Punkt S gemeinsam hätten. Es gibt somit keine Gerade, auf der die drei Punkte S, G, H gemeinsam liegen: $\neg\,\mathrm{koll}(S, G, H)$. Wegen dieser Nichtkollinearität muss jetzt nach dem Inzidenzaxiom I.4 genau eine Ebene ε existieren, die durch jeden der drei Punkte S, G, H geht. Weil S und G in ε liegen, müssen nach Axiom I.5 alle Punkte von g in ε liegen. Analog liegen mit S und H alle Punkte von H auch in ε. Damit liegt sowohl g als auch h vollständig in ε und unsere Geraden g und h sind somit komplanar.

Lösung von Aufgabe 6.09

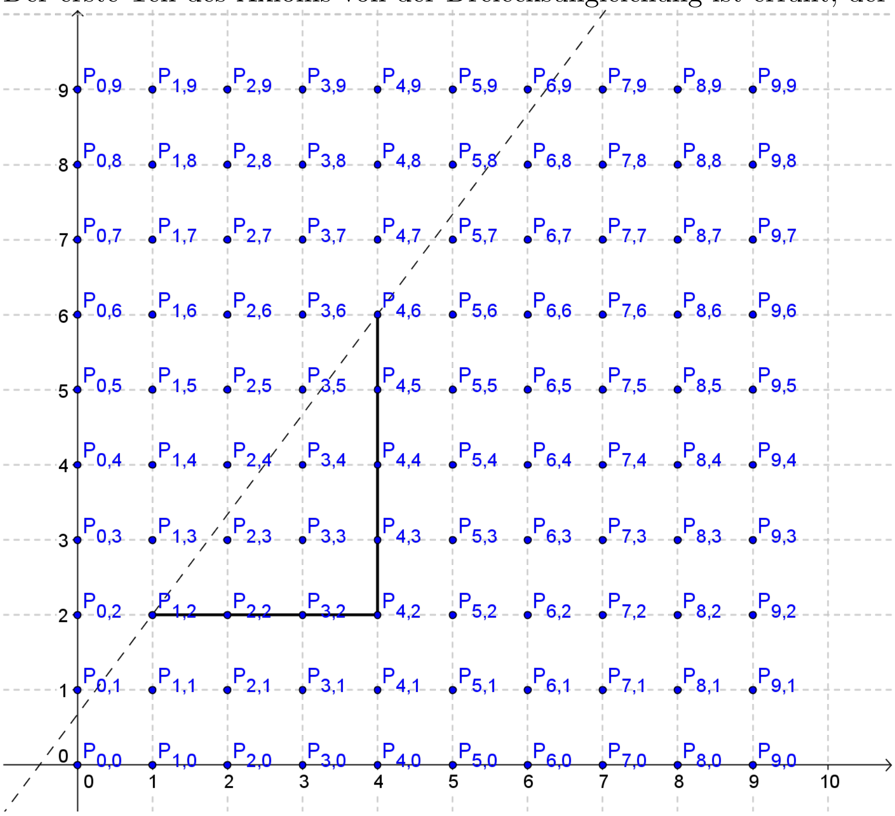
Illustration des Beispiels



$|P_{3,4}P_{5,1}| := |3-5| + |4-1| = |-2| + |3| = 5$

Antwort

Der erste Teil des Axioms von der Dreiecksungleichung ist erfüllt, der zweite Teil nicht:

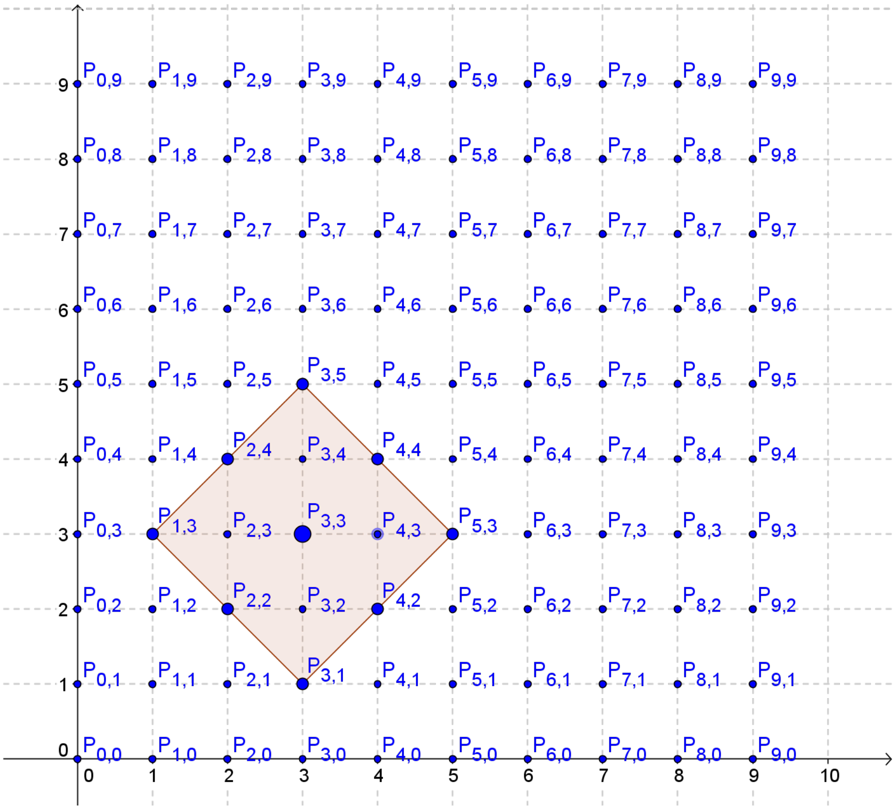


Es gilt

$$
\begin{aligned}
|P_{1,2}P_{4,2}| &= 3 \\
|P_{4,2}P_{4,6}| &= 5 \\
|P_{1,2}P_{4,6}| &= 7 \\
|P_{1,2}P_{4,2}| + |P_{4,2}P_{4,6}| &= 7
\end{aligned}
$$

$P_{1,2}, P_{4,2}, P_{4,2}$ sind jedoch nicht kollinear.

Lösung von Aufgabe 6.10



$k : \{P_{1,3}, P_{2,2}, P_{3,1}, P_{4,2}, P_{5,3}, P_{4,4}, P_{3,5}, P_{2,4}\}$

Lösungen von Serie 7

Lösung von Aufgabe 7.01

a) Der Teil mit der Strecke $\overline{AB}$ ist trivial. Bleibt:
Voraussetzung 1: $P \in AB$
Voraussetzung 2: $|AP| > |BP|$
Behauptung: $\mathrm{Zw}(A, B, P)$
Annahme: $\neg\,\mathrm{Zw}(A, B, P)$
Beweis:
Wir können davon ausgehen, dass A, B und P drei paarweise verschiedene Punkte sind: A und B sind es sowieso (Halbgerade) und sollte $P \equiv A$ oder $P \equiv B$ sein, dann würde P zu $\overline{AB}$ gehören und trivialerweise zu AB^+ entsprechend Definition V gehören.
Nach Voraussetzung 1 sind die drei paarweise verschiedenen Punkte A, B, P kollinear. Nach Satz ... liegt von drei paarweise verschiedenen Punkten genau einer zwischen den beiden anderen. Nach unserer Annahme liegt B nicht zwischen A und P. Es

können demnach noch die beiden folgenden Fälle eintreten:

1. Fall: $\mathrm{Zw}(P, A, B)$
2. Fall: $\mathrm{Zw}(A, P, B)$

Beweis für Fall 1:

(I) $|PA| + |AB| = |PB|$ ($\mathrm{Zw}(P, A, B)$)

(II) $|PA| \leq |PB|$ (Folgt aus (I), den Rechenregeln der Addition in $\mathbb{R}$ und daraus, dass nach dem Abstandsaxiom die Abstände zwischen zwei Punkten nicht negativ sind.

(III) $|PA| \leq |PB|$ ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung 2:
$|AP| > |BP|$.

Beweis für Fall 2:
In diesem Fall gehört P zur Strecke $\overline{AB}$ und gehört damit trivialerweise zur Halbgeraden AB^+ entsprechend Definition V.

b) Der Teil mit der Strecke $\overline{AB}$ ist wieder trivial. Bleibt:
Voraussetzung: $\mathrm{Zw}(A, B, P)$
Behauptung 1: $P \in AB$
Behauptung 2: $|AP| > |BP|$
Beweis:

(I) $P \in AB$ ist erfüllt, da die drei Punkte wegen $\mathrm{Zw}(A, B, P)$ kollinear sind.

(II) Aus $\mathrm{Zw}(A, B, P)$ folgt $|AB| + |BP| = |AP|$. (Anwendung der Definition *Zwischen* auf die Voraussetzung.)

(III) Unsere drei Punkte sind paarweise verschieden (falls nicht $\overline{AB}$) und nach dem Abstandaxiom die betrachteten Abstände postive reelle Zahlen sind, folgt aus $|AB| + |BP| = |AP|$ unmittelbar $|AP| > |BP|$.

Lösung von Aufgabe 7.03

$\varepsilon A^+ := \left\{P | \overline{PA} \cap \varepsilon = \emptyset\right\} \cup \varepsilon$
$\varepsilon A^- := \left\{P | \overline{PA} \cap \varepsilon \neq \emptyset\right\}$

Lösung von Aufgabe 7.04

$\frac{\pi}{3}$ ist eine positive reele Zahl. Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Axiom vom Lineal.

Lösung von Aufgabe 7.05

a) $AB^+ \cap BA^+ = \overline{AB}$

b) $AB^- \cap BA^- = \emptyset$

c) AB geschnitten mit dem Kreis um A durch $B = \{B, B^*\}$
mit $|AB^*| = |AB| \wedge B^* \in AB^-$.

d) $AB \cap BA = AB = BA$

Lösung von Aufgabe 7.06

Annahme: $\overline{AB}$ hat zwei Mittelpunkte M_1 und M_2.
Beide Punkte gehören entsprechend der *Definition Mittelpunkt einer Strecke* zur Strecke $\overline{AB}$ und somit (s. Definition Halbgerade) zur Halbgeraden AB^+.
Weil beide Punkte Mittelpunkte sind gilt:

$$\begin{aligned}
|AM_1| + |M_1B| &= |AB| \\
|AM_2| + |M_2B| &= |AB| \\
|AM_1| + |M_1B| &= |AM_2| + |M_2B| \\
2|AM_1| &= 2|AM_2| \\
|AM_1| &= |AM_2|
\end{aligned}$$

Aus dem Axiom vom Lineal folgt unmittelbar aus Gleichung 5: $M_1 \equiv M_2$.

Lösung von Aufgabe 7.07

Die Definition fordert $\forall A, B \in M : \overline{AB} \subseteq M$ und nicht $\exists A, B \in M : \overline{AB} \subseteq M$

Lösung von Aufgabe 7.08

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ferner seien g ein Gerade, die durch M geht und A ein Punkt des Kreises k, der nicht zu g gehört. Unter Halbkreisen versteht man die beiden folgenden Schnittmengen $gA^+ \cap k$ bzw. $gA^- \cap k$.

Lösung von Aufgabe 7.09

Es seien A, B, C drei nichtkollineare Punkte. $\overline{ABC} := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$.

Lösung von Aufgabe 7.10

Es seien A, B, C, D vier komplanare Punkte, von denen je drei nichtkollinear sind. $\overline{ABCD} := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$.

Lösungen von Serie 8

Lösung von Aufgabe 8.01

a) Aus dem Punkt A, der Geraden AB und der Halbebene $AB, Q^\circ+$

b) Zeichnen Sie eine Halbgerade AB^+ und eine Halbebene, die AB als Trägergerade hat. Fertig ist die Fahne.

c) Blatt Papier falten und auf der Faltgerade eine Halbgerade zeichnen.

Lösung von Aufgabe 8.02

a) Es seien AB^+ und AC^+ zwei verschiedene Halbgeraden. Unter der Heidelberger Übungsfahne $H\ddot{U}F$ versteht man die folgende Punktmenge:
$H\ddot{U}F := AB, C^+ \cap AC, B^+ \cup AB.$

b) Mittels eines einzigen Beispiels kann man kaum einen Begriff einführen ...

c) und das schon gar nicht, wenn es sich bei dem Beispiel um einen ausgesprochenen Spezialfall handelt (Die beiden Strahlen stehen senkrecht aufeinander.).

Lösung von Aufgabe 8.03

a) Eine Gerade wird durch einen `Punkt` in zwei `Halbgeraden` eingeteilt.

b) Eine Ebene wird durch eine `Gerade` in zwei `Halbebenen` eingeteilt.

c) Eine Gerade ist ein `ein`dimensionales Objekt.

d) Eine Ebene ist ein `zwei`dimensionales Objekt.

e) Im Fall dieser Geradenteilung ist der Trenner ein `null`dimensionales geometrisches Objekt.

f) Im Fall dieser Ebenenteilung ist der Trenner ein `ein`dimensionales geometrisches Objekt.

g) Wenn also n die Dimension des geometrischen Objekts ist, das geteilt wird, dann hat der Trenner die Dimension $n - 1$.

Lösung von Aufgabe 8.04

Es seien M_1 und M_2 zwei konvexe Punktmengen.
Es seien A und B zwei verschiedene Punkte aus $M_1 \cap M_2$.
Entsprechend der Definition einer Schnittmenge gilt jetzt:

(I) $A \in M_1 \wedge B \in M_1$

(II) $A \in M_2 \wedge B \in M_2$

(III) Wegen (I) und wegen der Konvexität der Menge M_1 gilt $\overline{AB} \subseteq M_1$.

(IV) Wegen (II) und wegen der Konvexität der Menge M_2 gilt $\overline{AB} \subseteq M_2$.

(V) Zusammengenommen sagen (III) und (IV) nichts anderes aus, als dass mit zwei Punkten aus $M_1 \cap M_2$ die gesamte Verbindungsstrecke der beiden Punkte in $M_1 \cap M_2$ liegt.

Lösung von Aufgabe 8.05

Wir beweisen die Kontraposition:
Wenn $M_1 \cap M_2$ nicht konvex ist, dann sind auch M_1 und M_2 nicht konvex.

(I) $\exists A, B \in M_1 \cap M_2 : \overline{AB} \nsubseteq M_1 \cap M_2$ ($M_1 \cap M_2$ ist nicht konvex)

(II) Sollte $\overline{AB} \subseteq M_1 \wedge \overline{AB} \subseteq M_2$ gelten, müsste auch $\overline{AB} \subseteq M_1 \cap M_2$ gelten.

Lösung von Aufgabe 8.06

Umkehrung: $M_1 \cap M_2$ konvex $\Rightarrow M_1$ konvex und M_2 konvex.
Die Umkehrung ist nicht wahr. Man kann zwei nicht konvexe Menegen derart schneiden, dass die Schnittmenge konvex ist.

Lösung von Aufgabe 8.07

$\mathrm{I}(\overline{ABCD}) := \mathrm{I}(\overline{ABC}) \cup \mathrm{I}(\overline{CDA})$

Lösung von Aufgabe 8.08

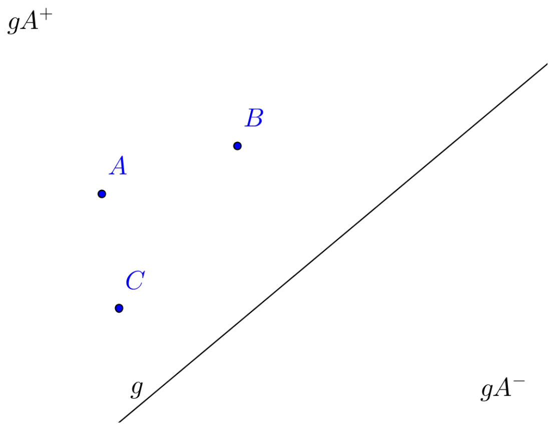
Zeichnungen helfen.

Lösung von Aufgabe 8.09

Es sei k ein Kreis und $P_1, P_2, \ldots, P_n$ eine Menge von Punkten auf k mit
$|P_iP_{i+1}| = |P_{i+1}P_{i+2}| = |P_{i+2}P_{i+3}| = \ldots |P_{n-1}P_n| = |P_nP_1|$.
Die Vereinigungsmenge $\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3} \cup \ldots \overline{P_{n-1}P_n} \cup \overline{P_nP_1}$ heißt regelmäßiges n-Eck.

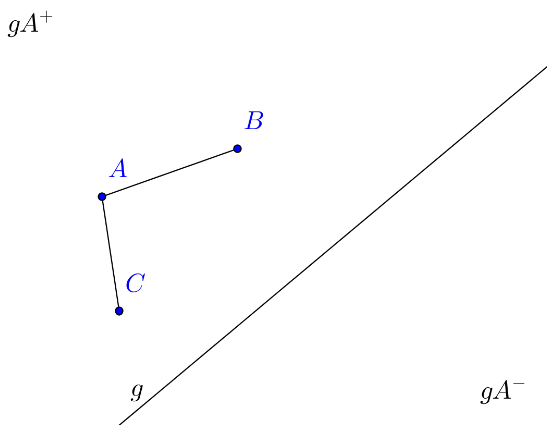
Lösung von Aufgabe 8.10

Lösung von Teilaufgabe a)



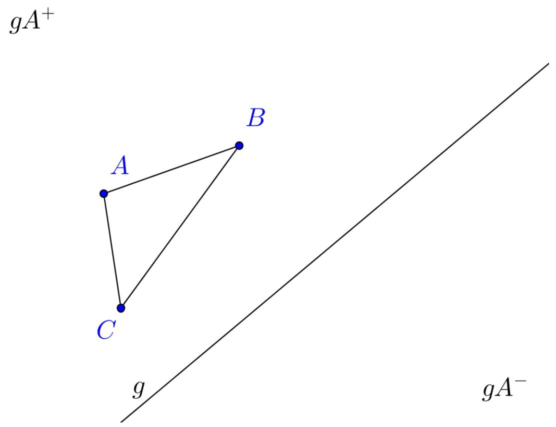
Voraussetzungen

(I)	$\operatorname{nkoll}(A, B, C)$		
(II)	$\{A, B, C\} \cap g = \emptyset$		
(III)	$B \in gA^+$	bzw.	$\overline{AB} \cap g = \emptyset$
(IV)	$C \in gA^+$	bzw.	$\overline{AC} \cap g = \emptyset$

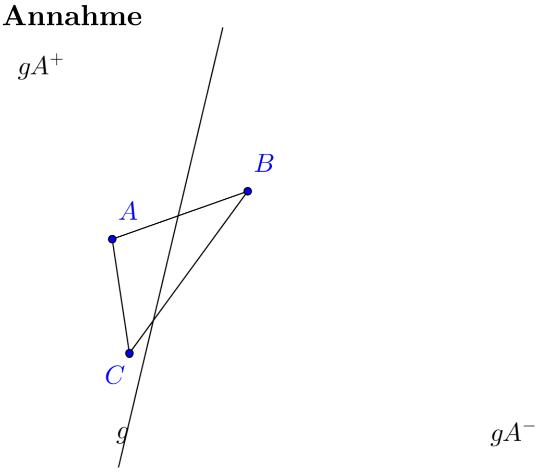


Behauptung

B	$C \in gB^+$	bzw.	$\overline{CB} \cap g = \emptyset$



Annahme



$\overline{CB} \cap g \neq \emptyset$

Wegen (I) und (II) sind die Voraussetzungen zur Anwendung des Axioms von Pasch erfüllt. Wenn nun die Gerade g die Seite $\overline{BC}$ des Dreiecks $\overline{ABC}$ innerhalb schneidet, muss sie nach eben diesem Axiom von Pasch auch die Seite $\overline{BA}$ oder $\overline{AB}$ innerhalb schneiden. Beides ist wegen (III) bzw. (IV) nicht möglich.

Lösung von Teilaufgabe b)

Der Beweis lässt sich analog zu Teilaufgabe a) durch Anwendung des Axioms von Pasch führen.

Lösungen von Serie 9

Lösung von Aufgabe 9.01

Wenn zwei Winkel einen Schenkel gemeinsam haben und die beiden anderen Schenkel eine Gerade bilden, dann sind die beiden Winkel ein Paar von Nebenwinkeln.

Lösung von Aufgabe 9.02

Wenn die Schenkel zweier Winkel zwei Paare sich in geneu eibnem Punkt schneidender Geraden bilden, dann sind sie ein Paar von Scheitelwinkeln.

Lösung von Aufgabe 9.03

Jeder Nebenwinkel eines Innenwinkels eines Dreiecks ist ein Außenwinkel dieses Dreiecks.

Lösung von Aufgabe 9.04

Es seien g und h zwei nicht identische Geraden. Auf g sei der Punkt G und auf h sei der Punkt H gegeben. Ferner mögen die Punkte $B \in g$ und $C \in h$ zwei nicht identische Punkte sein, die in ein und derselben Halbebene bzgl. GH liegen. A sei derart gewählt, dass $\mathrm{Zw}(AGH)$ gilt. Die Winkel $\angle AGB$ und $\angle GHC$ bilden ein Paar von Stufenwinkeln.

Lösung von Aufgabe 9.05

Es seien α und β zwei Stufenwinkel. α und der Scheitelwinkel β' von β bilden ein Paar von Wechselwinkeln.

Lösung von Aufgabe 9.06

Wenn die Halbgerade SP^+ im Inneren des Winkels $\angle ASB$ liegt und die Gleichung $|\angle ASP| = |\angle PSB|$ erfüllt ist, dann heißt SP^+ Winkelhalbierende von $\angle ASB$.

Aufgabe 9.07

In der Ebene ε seien eine Gerade g und ein Punkt P mit $P \in g$ gegeben.
Beweisen Sie:

1) $\exists s \subset \varepsilon : P \in s \wedge s \perp g$

2) $s_1 \subset \varepsilon \wedge P \in s_1 \wedge s \perp g \Rightarrow \neg s_2 : s_2 \subset \varepsilon \wedge P \in s_2 \wedge s_2 \perp g \wedge s_2 \not\equiv s_1$

Lösung von Aufgabe 9.07

1) Existenzbeweis:
   Es ist nachzuweisen, dass man in jedem Punkt P einer Geraden g in einer die Gerade g enthaltenden Ebene ε eine Senkrechte s auf g errichten kann. Es sei H ein beliebiger von P verschiedener Punkt der Geraden g und GQ^+ eine der beiden durch g in ε eindeutig bestimmten Halbebenen. Nach dem Winkelkonstruktionsaxiom gibt es in gQ^+ genau einen Strahl PT^+ mit $|\angle HPT| = 90°$. Die Gerade $s = HT$ steht damit senkrecht auf g.

2) Eindeutigkeitsbeweis:
   Wir nehmen an, dass zu $g = PH$ in ε im Punkt P zwei verschiedene Geraden $s_1 = PT_1$ und $s_2 = PT_2$ mit $s_1 \perp g \wedge s_2 \perp g$ existieren. Wegen $s_1 \perp g \wedge s_2 \perp g$ gilt: $|\angle HPT_1| = |\angle HPT_2| = 90°$. Nach dem Winkelkonstruktionsaxiom muss jetzt $PT_1 \equiv PT_2$ und damit $s_1 \equiv s_2$ gelten.

Lösung von Aufgabe 9.08

In jeder Ebene, die eine Gerade g enthält, gibt es in jedem Punkt der Geraden g genau eine zu g senkrechte Gerade s.

Aufgabe 9.09

Beweisen Sie:
Wenn P im Inneren des Winkels $\angle ASB$ liegt, dann ist $|\angle ASP| \leq |\angle ASB|$.

Lösung von Aufgabe 9.09

$$\begin{array}{rrcl}
\text{(I)} & |\angle ASP| + |\angle PSB| = & |\angle ASB| & \text{Winkeladditionsaxiom} \\
\text{(II)} & |\angle ASP| = & |\angle ASB| - |\angle PSB| & \text{(I)} \\
\text{(III)} & |\angle ASP| \leq & |\angle ASB| & \text{(II), Winkelgrößen sind positiv}
\end{array}$$

Lösung von Aufgabe 9.10

Es sei $\alpha = \angle ASB$ ein Winkel.

$$\begin{array}{rrr}
\text{(I)} & \exists|\alpha| : 0 < |\alpha| < 180 & \text{Winkelmaßaxiom} \\
\text{(II)} & \text{wählen: } \dfrac{|\alpha|}{2} & \text{Hälfte einer reellen Zahl} \\
\text{(III)} & \exists SP^+ \subset AS, B^+ : |\angle ASP| = \dfrac{|\alpha|}{2} & \text{Winkelkonstruktionsaxiom} \\
\text{(IV)} & SP^+ \subset \mathrm{I}(\angle ASB) & \text{wird später nachgewiesen} \\
\text{(V)} & |\angle ASP| + |\angle PSB| = |\alpha| & \text{(IV), Winkeladditionsaxiom} \\
\text{(VI)} & \dfrac{|\alpha|}{2} + |\angle PSB| = |\alpha| & \text{(III), (V)} \\
\text{(VII)} & |\angle PSB| = \dfrac{|\alpha|}{2} & \text{(VI} \\
\text{(VIII)} & |\angle PSB| = |\angle ASP| = \dfrac{|\alpha|}{2}\text{q.e.d.} & \text{(VII, (III)}
\end{array}$$

Bleibt zu zeigen:

$$SP^+ \subset \mathrm{I}(\angle ASB)$$

(1)	$SP^+ \subset AS, B^+$	Konstruktion laut Winkelskonstruktionsaxiom
(2)	Fall 1: $P \in \mathrm{I}(\angle ASB)$	genau zwei Fälle können auftreten
(3)	Fall 2: $B \in \mathrm{I}(\angle ASP)$	zweiter Fall
(4)	tritt Fall 1 auf: siehe obiger Beweis	
(5)	Annahme Fall 2: $B \in \mathrm{I}(\angle ASP)$	s. (3)
(6)	$\lvert\angle ASB\rvert + \lvert\angle BSP\rvert = \lvert\angle ASP\rvert$	(5), Winkeladditionsaxiom, Lemmata Inneres
(7)	$\lvert\alpha\rvert + \lvert\angle BSP\rvert = \frac{\lvert\alpha\rvert}{2}$	(6), (III), (I)
(8)	$\lvert\alpha\rvert < \frac{\lvert\alpha\rvert}{2}$	(7), Winkelgrößen sind positiv

$|\alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$ ist ein Widerspruch in sich. Keine reelle Zahl ist kleiner als ihre Hälfte. Unsere Annahme $\in \mathrm{I}(\angle ASP)$ ist somit zu verwerfen.

Lösungen von Serie 10

Lösung von Aufgabe 10.01

Beweisidee

1. Voraussetzung: Zwei Dreiecke stimmen in zwei Winkeln und der eingeschlossenen Strecke überein.

2. Wir haben zu zeigen, dass die Dreiecke in allen Stücken (Winkel und Seiten) übereinstimmen.

3. Dazu reicht es zu zeigen, dass die Dreiecke in einer weiteren Seite übereinstimmen, dann dann könnten wir SWS anwenden.

4. Wir nehmen an, dass die Dreiecke nicht in einem weiteren Paar einander zugehöriger Seiten übereinstimmen.

5. Wenn ein Paar zugehöriger Seiten zweier Dreiecke nicht kongruent ist, muss eine der beiden Seiten kleiner als die andere sein. Auf dem Strahl, der durch diese kürzere Seite bestimmt ist, konstruieren wir uns eine Seite die zu der längeren Seite kongruent ist.

6. Das dadurch neu entstanden Dreieck muss nach SWS zu dem anderen Dreieck kongruent sein.

7. Wir bekommen einen Widerspruch mit den Winkelgrößen.

Lösung von Aufgabe 10.02

Ein Dreieck mit zwei zueinander kongruenten Seiten heißt gleichschenkliges Dreieck.
Die beiden kongruenten Seiten des gleichschenkligen Dreiecks werden die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks genannt.
Wenn $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks $\overline{ABC}$ sind, dann ist die Seite $\overline{AB}$ die Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\overline{ABC}$.
Wenn $\overline{AB}$ die Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\overline{ABC}$ ist, dann nennt man $\angle CAB$ und $\angle CBA$ die Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks $\overline{ABC}$.

Lösung von Aufgabe 10.03

Voraussetzung

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit

(V): $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

Behauptung

Die Behauptung lautet:

(B): $\angle BAC \cong \angle ABC$

Der Beweis

Es sei w_γ die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$. Nach den Lemmata zum Inneren von Winkeln schneidet w_γ die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks $\overline{ABC}$ innerhalb. Der Schnittpunkt von w_γ mit $\overline{AB}$ sei mit M bezeichnet. Die beiden Teildreiecke $\overline{AMC}$ und $\overline{BMC}$ sind nach SWS zueinander kongruent:

1. Beide Dreiecke haben die Seite $\overline{CM}$ gemeinsam.
2. Die Winkel $\angle ACM$ und $\angle BCM$ sind kongruent zueinander, weil $w_\gamma = CM^+$ die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist.
3. Die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind nach Voraussetzung kongruent zueinander.

Weil die beiden Teildreiecke $\overline{AMC}$ und $\overline{BMC}$ zueinander kongruent sind, sind auch die bei dieser Kongruenz einander entsprechenden Basiswinkel $\angle CAB$ und $\angle CBA$ zueinander kongruent.

Lösung von Aufg. 10.04

Der Punkt P habe zu den Endpunkten A und B der Strecke $\overline{AB}$ jeweils ein und denselben Abstand: (V) $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

(I)	$\exists M \in \overline{AB} : \overline{AM} \cong \overline{BM}$	Existenz des Mittelpunktes
(II)	$\overline{MC} \cong \overline{MC}$	trivial
(III)	$\overline{AMC} \cong \overline{BMC}$	(V), (I), (II), SSS
(IV)	$\angle AMC \cong \angle BMC$	(III)
(V)	$CM \perp AB$	(IV), kongruente Nebenwinkel

Nach unserer Beweisführung ist MP die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. Damit ist P ein Punkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.
q.e.d.

Lösung von Aufg. 10.05

Es sei m die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. Ferner sei $P \in m$. Wir haben zu zeigen, dass $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ gilt. Hierzu betrachten wir den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$.

(I)	$\angle PMA \cong \angle PMB$	$m = PM$ ist Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$
(II)	$\overline{PM} \cong \overline{PM}$	trivial
(III)	$\overline{AM} \cong \overline{BM}$	M ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$
(IV)	$\overline{AMP} \cong \overline{BMP}$	(I), (II), (III), SWS
(V)	$\overline{AP} \cong \overline{BP}$	(IV)

Lösung von Aufg. 10.06

Ein Punkt P ist genau dann ein Punkt der Mittelsenkrechten $m_{\overline{AB}}$ der Strecke $\overline{AB}$, wenn er zu A und zu B jeweils denselben Abstand hat:

$$P \in m_{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{PA} \cong \overline{PB}$$

Lösung von Aufgabe 10.07

Entsprechend der Lösung von Aufgabe 10.06 ist die Eigenschaft eines Punktes zu den Endpunkten einer Strecke jeweils denselben Abstand zu haben, eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung dafür, ein Punt der Mittelsenkrechten dieser Strecke zu sein. Damit könnte diese Abstandseigenschaft als definierende Eigenschaft des Begriffs Mittelsenkrechte verwendet werden:

Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die Menge aller Punkte, die zu den Endpunkten der Strecke jeweils denselben Abstand haben:

$$m_{\overline{AB}} := \{P||AB| = |BP|\}$$

Lösung von Aufgabe 10.08

a) Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten zueinander kongruent sind, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

b) Beweisen Sie für die in a) definierte Vierecksart:
Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, dann halbieren seine Diagonalen.

Beweis. Sei $\overline{ABCD}$ ein Viereck mit $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ und $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. M sei der Diagonalenschnittpunkt von $\overline{ABCD}$. $DasDreieck\overline{ABC}$ ist zum Dreieck $\overline{CDA}$ nach SSS kongruent. Demzufolge sind jetzt die Winkel $\angle BAC$ und $\angle DCA$ zueinander kongruent. Ebenso sind die beiden Dreiecke $\overline{ABD}$ und $\overline{DCB}$ zueinander kongrunent, woraus $\angle ABC \cong \angle CDB$ gefolgert werden kann. Die Dreiecke $\overline{ABM}$ und $\overline{DCM}$ sind nun nach WSW kongruent, woraus die Eigenschaft der gegenseitigen Diagonalenhalbierung zu folgern ist.

Lösung von Aufgabe 10.09

10

Lösung von Aufgabe 10.10

$2 + 10 + 16 = 28$

Lösungen von Serie 11

Lösung von Aufgabe 11.01

Wir betrachten den Winkel $\angle ACB$. Sein Inneres ist der Schnitt der beiden Halbebenen AC, B^+ und BC, A^+. Wenn wir zeigen könnten, dass P im Inneren von $\angle ACB$ liegt, dann hätten wir auch gezeigt, dass $P \in BC, A^+$ gilt.
Das Innere eines jeden Winkel ist konvex.(Zum Inneren des Winkels gehören auch seine Schenkel.) Wegen der Konvexität des Inneren eines Winkels liegt mit den Punkten A und B die gesamte Strecke $\overline{AB}$ im Inneren von $\angle ACB$. Mit der Strecke $\overline{AB}$ liegt natürlich auch ihr Mittelpunkt M im Inneren von $\angle ACB$. Nach Lemma W/1 liegt mit M der gesamte Strahl CM^+ im Inneren von Winkel $\angle ACB$. Wegen $P \in CM^+$ liegt natürlich auch P im Inneren von Winkel $\angle ACB$.

Lösung von Aufgabe 11.02

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen. Die Umkehrung des Satzes „Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.“ lautet: „Dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber.“
O.B.d.A. können wir die beiden Implikationen wie folgt formulieren:
$(\rightarrow) : |a| > |b| \Rightarrow |\alpha| > |\beta|$
$(\leftarrow) : |\alpha| > |\beta| \Rightarrow |a| > |b|$
$(\leftarrow)$ haben wir zu beweisen. $(\rightarrow)$ ist schon bewiesen.
Voraussetzung: $|\alpha| > |\beta|$
Behauptung: $|a| > |b|$
Annahme: $|b| \geq |a|$
Fall 1: $|b| = |a|$
In diesem Fall gilt nach dem Basiswinkelsatz: $|\alpha| = |\beta|$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.
Fall 2: $|b| > |a|$
In diesem Fall gilt nach $(\rightarrow)$: $|\beta| > |\alpha|$, was wiederum ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Lösung von Aufgabe 11.03

Existenz

Es seien g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht zu g gehört. Ferner sei A ein Punkt auf g. Sollte $PA \perp g$ gelten, wären wir fertig. Falls dem nicht so ist, gehen wir wie folgt vor:
Es sei R ein von A verschiedener Punkt auf g.
Nach dem Winkelkonstruktionsaxiom existiert in gP^- ein Strahl AZ^+ derart, dass $|\angle PAR| = |\angle ZAR|$ gilt. Nach dem Abstandsaxiom und dem Axiom vom Lineal existiert auf AZ^+ ein Punkt P' mit $|AP| = |AP'|$. Da der gesamte Strahl AP'^+ in gP^- liegt, wird die Strecke $\overline{PP'}$ durch g innerhalb geschnitten. Wir wollen den Schnittpunkt mit L bezeichnen. Wir zeigen jetzt, dass die Dreiecke $\overline{LP'A}$ und $\overline{LPA}$ kongruent zueinander sind:

(I)	$\overline{AL} \cong \overline{AL}$	trivial
(II)	$\overline{AP} \cong \overline{AP'}$	nach Konstruktion von P'
(III)	$\angle PAL \cong \angle P'AL$	nach Konstruktion von $\angle P'AL$
(IV)	$\overline{LP'A} \cong \overline{LPA}$	(I), (II), (III), SWS

Wegen (IV) gilt $\angle PLA \cong \angle P'LA$ und somit $PP' \perp g$.

Eindeutigkeit

Es sei L_1 ein Punkt auf g mit $PL_1 \perp g$.
zu zeigen: Es existiert kein von L_1 verschiedener Punkt L_2 auf g mit $PL_2 \perp g$.
Annahme: Es existiert ein von L_1 verschiedener Punkt L_2 auf g mit $PL_2 \perp g$.
Die Punkte P, L_1, L_2 sind nicht kollinear und $\overline{PL_1L_2}$ ist somit ein Dreieck. Dieses Dreieck hat mit $\angle PL_1L_2$ und $\angle PL_2L_1$ zwei rechte Winkel, was ein Widerspruch zu einem Korollar aus dem schwachen Außenwinkelsatz ist: Jedes Dreieck hat wenigstens zwei spitze Winkel.

Lösung von Aufgabe 11.04

Es seien k ein Kreis und $\overline{ABC}$ ein Dreieck. Wenn jeder der drei Punkte A, B, C zu k gehört, dann ist k ein Umkreis von $\overline{ABC}$.

Lösung von Aufgabe 11.05

Existenz

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen. Die Mittelsenkrechte m_a der Strecke $\overline{BC}$ schneidet die Mittelsenkrechte m_b der Strecke $\overline{AC}$ in dem Punkt M. Dieser Schnittpunkt muss existieren, weil ansonsten koll(A, B, C gelten würde und $\overline{ABC}$ kein Dreieck wäre.

(I)	$\lvert MB\rvert = \lvert MC\rvert$	m_a ist Mittelsenkrechte von $\overline{BC}$ [
(II)	$\lvert MA\rvert = \lvert MC\rvert$	m_b ist Mittelsenkrechte von $\overline{AC}$ [
(III)	$\lvert MA\rvert = \lvert MC\rvert = \lvert MB\rvert$	(I) und (II)
(IV)	A, B, C gehören zu ein und demselben Kreis um M	(III), Definition Kreis

Eindeutigkeit

Wir nehemen an, dass ein Dreieck $\overline{ABC}$ zwei verschiedene Umkreis k_1 und k_2 hat. k_1 und k_2 müssen verschiedene Mittelpunkte M_1 und M_2 haben, sonst wären sie identisch (gleicher Mittelpunkt, gleicher Radius). Nach dem Mittelsenkrechtenkriterium liegen beide Mittelpunkte M_1 und M_2 auf den Mittelsenkrechten des Dreiecks $\overline{ABC}$. Alle Mittelsenkrechten der Dreiecks $\overline{ABC}$ wären damit identisch ... .

Lösung von Aufgabe 11.06

Stufenwinkelsatz

(ebene Geometrie) Wenn zwei verschiedene parallele Geraden a und b durch eine dritte Gerade c geschnitten werden, so sind die dabei entstehenden Stufenwinkel kongruent zueinander.

Umkehrung des Stufenwinkelsatzes

(ebene Geometrie) Wenn beim Schnitt zweier verschiedener Geraden a und b durch eine dritte Gerade c kongruente Stufenwinkel entstehen, dann sind die beiden Geraden a und b parallel zueinander.

Lösung von Aufgabe 11.07

Es seien a und b zwei verschiedene Geraden, die durch einer dritte Geraden jeweils in den Punkten $A \in a$ und $B \in b$ geschnitten werden. Bei diesem Schnitt mögen die kongruenten Stufenwinkel α mit dem Scheitel A und β mit dem Scheitel B entstehen. Wir nehmen nun an, dass die beiden Geraden a und b nicht parallel sind und sich somit in einem Punkt S schneiden. Bezüglich des Dreiecks $\overline{ABS}$ ist einer der beiden Winkel α oder β ein Außenwinkel. Der andere der beiden Winkel ist Innenwinkel bzw. Scheitelwinkel eines Innenwinkels von $\overline{ABC}$. Wie auch immer, wir bekommen jetzt einen Widerspruch zum schwachen Außenwinkelsatz.

Lösung von Aufgabe 11.08

Es sei P ein Punkt der Winkelhalbierenden von ASB. $\overline{PL_a}$ und $\overline{PL_b}$ seien die Lote von P auf SA^+ bzw. von P auf SB^+. Wir haben zu zeigen, dass $\overline{PL_a} \cong \overline{PL_b}$ gilt. Wir hätten das gezeigt, wenn wir nachweisen könnten, dass $\overline{PSL_a} \cong \overline{PSL_b}$ gilt. $\overline{PSL_a} \cong \overline{PSL_b}$ würde gelten, wenn $\overline{L_aS} \cong \overline{L_bS}$ gelten würde (SWS). Wir nehmen $|L_aS| > |L_bS|$ an. Jetzt gibt es nach dem Axiom vom Lineal auf SL_b^+ genau einen Punkt Z mit $|SL_a| = |SZ|$. Nach SWS sind nun die Dreiecke $\overline{L_aSP}$ und $\overline{ZSP}$ kongruent zueinander, woraus folgt, dass $\angle SZP$ ein Rechter ist. Da auch $\angle SL_bP$ ein Rechter ist, bekommen wir ein Problem mit dem schwachen Außenwinkelsatz.

Lösung von Aufgabe 11.09

Es seien $\angle ASB$ ein Winkel und P ein Punkt mit $|P, SA| = |P, SB|$. Es seien L_b und L_a die Fußpunkte der Lote von P auf SB bzw. von P auf SA. Wenn wir zeigen könnten, dass $\overline{L_aSP} \cong \overline{L_bSP}$ gilt, wären wir fertig. Das ist aber nach SsW so.

Lösung von Aufgabe 11.10

In jedem Dreieck sind mindesten zwei Innenwinkel spitze Winkel.

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen. Wir nehmen an, dass die Größe der Innenwinkel α und β jeweils größer oder gleich $90°$ sind. Nun sei β' ein Nebenwinkel von β und damit gleichzeitig ein Außenwinkel von $\overline{ABC}$. Nach dem Supplementaxiom muss nun die Größe von β' kleiner oder gleich der Größe von β sein. Da nach unserer Annahme die Größe des Winkels α größer oder gleich $90°$ ist, bekommen wir einen Widerspruch zum schwachen Außenwinkelsatz.

Die Summe der Größen zweier Innenwinkel eines Dreiecks ist stets kleiner als $180°$

Annahme: (I) $|\alpha| + |\beta| \geq 180°$

(II)	$\|\beta\| + \|\beta'\| = 180°$	Supplementaxiom
(III)	$\|\alpha\| + \|\beta\| \geq \|\beta\| + \|\beta'\|$	(I) und (II)
(IV)	$\|\alpha\| \geq \|\beta'\|$	(III)

(IV) ist ein Widerspruch zum schwachen Außenwinkelsatz.

Lösungen von Serie 12

Lösung von Aufgabe 12.01

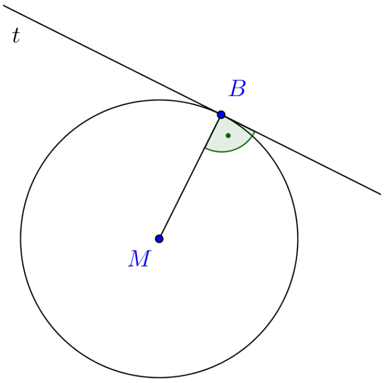
Üblicherweise definiert man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks als die Seite dieses Dreiecks, die dem rechten Winkel gegenüberliegt. Nach den Seiten-Winkel-Beziehungen für Dreiecke gilt, dass der größten Seite der größte Winkel und umgekehrt dem größten Winkel die größte Seite gegenüberliegt. Ein Korollar aus dem schwachen Außenwinkelsatz besagt, dass jedes Dreieck wenigstens zwei spitze Innenwinkel hat. Im rechtwinkligen Dreieck muss damit der rechte Winkel auch der größte Innenwinkel des rechtwinkligen Dreiecks sein. Demnach liegt dem rechten Winkel immer die größte Seite des Dreiecks und umgekehrt der größten Seite eines rechtwinkligen Dreiecks auch immer der rechte Innenwinkel gegenüber. Also ist Marks Definition der Hypotenuse eines Dreiecks äquivalent zur üblichen Definition.

Lösung von Aufgabe 12.02

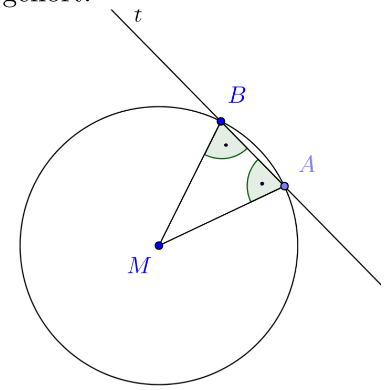
Definition 13 (*Kreistangente*)

Wenn eine Gerade t mit einem Kreis k genau einen Punkt B gemeinsam hat und mit dem Kreis k in ein und derselben Ebene liegt, dann heißt t Tangente an k im Berührungspunkt B. Die Strecke, deren Endpunkte der Mittelpunkt von k und der Berührungspunkt B sind, heißt Berührungsradius der Tangente t an k in B.

Lösung von Aufgabe 12.03



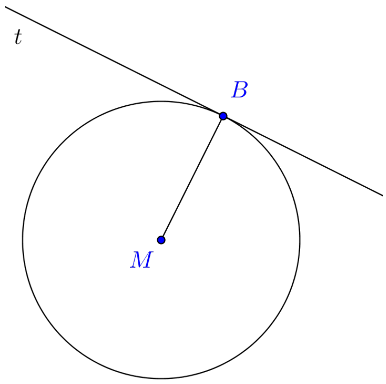
Voraussetzung: $t \perp MB, B \in t \wedge B \in k$
Behauptung: t und k haben nur B gemeinsam.
Beweis: (durch Widerspruch)
Annahme:
Es existiert ein zweiter von B verschiedener Punkt A, der sowohl zu k als auch zu t gehört.



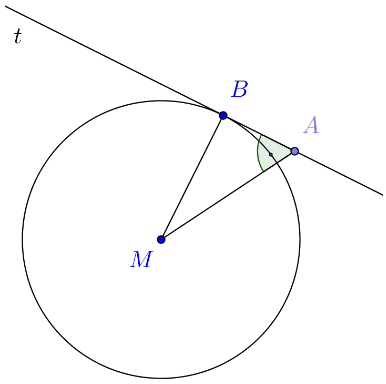
(I)	$\lvert\angle MBA\rvert = 90^\circ$	Voraussetzung $T \perp MB$
(II)	$\overline{MB} \cong \overline{MA}$	Radien ein und desselben Kreises
(III)	$\angle MAB \cong \angle MBA$	(II), Basiswinkelsatz
(IV)	$\lvert\angle MAB\rvert = 90^\circ$	(I), (III)

Nach (I) und (IV) hätte das Dreieck $\overline{MBA}$ zwei rechte Innenwinkel. Das ist allerdings ein Widerspruch zu einer Folgerung aus dem schwachen Außenwinkelsatz: Jedes Dreieck hat wenigstens zwei spitze Winkel. $\overline{MBA}$ hätte aber nur wegen der beiden rechten Innenwinkel höchstens einen spitzen Innenwinkel.

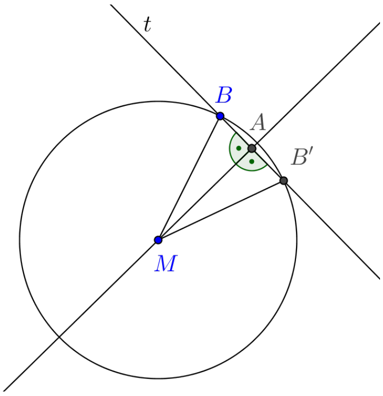
Lösung von Aufgabe 12.04



Voraussetzung: $\mathrm{komp}(t, k), t \cap k = \{B$
Behauptung: $t \perp MB$.
Beweis: (durch Widerspruch)
Annahme:
$t \not\perp MB$.
Nach unserer Annahme kann $\overline{MB}$ nicht das Lot von M auf t sein. Wegen der Existenz des Lotes muss es auf t einen von B verschiedenen Punkt A mit $\overline{MA} \perp t$ geben.



Weil B der einzige gemeinsame Punkt von t und k ist, kann A nicht auf k liegen.
Fall (A): A liegt außerhalb von k
In diesem Fall gilt: (*) $|MB| < |MA|$. Im Dreieck $\overline{MBA}$ liegt der rechte Winkel $\angle MAB$ der Seite $\overline{MB}$ gegenüber. Weil der rechte Winkel der größte Winkel in $\overline{MBA}$ ist, muss ihm die längste Seite dieses Dreiecks gegenüberliegen. Das steht allerdings im Widerspruch zu (*).
Fall (I): A liegt innerhalb von k



Auf AB^+ existiert nach dem Axiom vom Lineal ein Punkt B' mit $\overline{AB} \cong \overline{AB'}$. Die beiden Dreiecke $\overline{MAB}$ und $\overline{MAB'}$ sind kongruent:

(I)	$\overline{AB} \cong \overline{AB'}$	nach Konstruktion von B'
(II)	$\overline{MB} \cong \overline{MB}$	trivial
(III)	$\angle MAB \cong \angle MAB'$	MA ist Lot von M auf t
(IV)	$\overline{MAB} \cong \overline{MAB'}$	(I). (II). (III), SWS

Schritt (IV) impliziert $\overline{MB} \cong \overline{MB'}$. Da der Punkt B' somit denselben Abstand zu M wie der Punkt B hat und der Punkt B ein Punkt des Kreises k ist, muss auch B' auf k liegen. B' ist nach seiner Konstruktion aber auch ein Punkt der Tangente t an k. t und k hätten somit zwei verschiedene Punkte gemeinsam. Da t nach Voraussetzung jedoch eine Tangente an k ist, ist das nicht möglich.

Lösung von Aufgabe 12.05

Definition 14 (*Inkreis*)

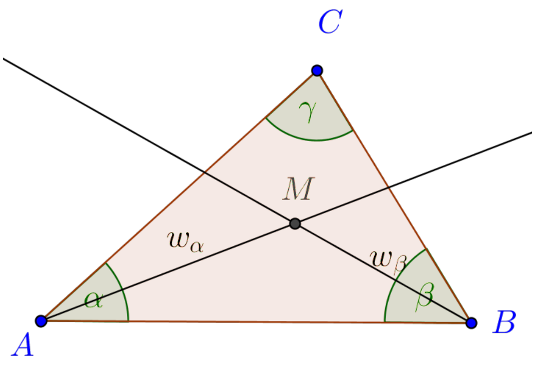
Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck. Wenn die Geraden AB, BC, AC Tangenten ein und desselben Kreises k sind, dann ist k der Inkreis von $\overline{ABC}$.

Lösung von Aufgabe 12.06

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den Innenwinkeln

$$\alpha = \angle CAB$$
$$\beta = \angle ABC$$
$$\gamma = \angle ACB$$

Die Winkelhalbierende w_α des Winkels α schneidet die Winkelhalbierende w_β in genau einem Punkt M:



Sollten sich w_α und w_β sich nicht in genau einem Punkt schneiden, so wären sie parallel. Damit wären die durch w_α und w_β bestimmten Geraden g_α und g_β entweder identisch oder sie hätten keinen Punkt gemeinsam.

Fall 1: $(g_\alpha \equiv g_\beta)$

In diesem Fall gilt: $g_\alpha \equiv g_\beta \equiv AB$.

Damit würde der halbe Winkel α entweder eine Größe von $o°$ oder von $180°$ haben, was für die Größe des gesamten Winkels α entweder eine Größe von $0°$ oder von $360°$ bedeuten würde. Beides ist für einen Innenwinkel eines Dreiecks unmöglich.

Fall 2: $(g_\alpha \cap g_\beta = \emptyset)$

Ein halber Winkel α und eine halber Winkel β wären jetzt entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen. Als solche wären sie supplementär:

$$\begin{array}{cccc} \left|\frac{\alpha}{2}\right| & + & \left|\frac{\beta}{2}\right| & = 180° \\ |\alpha| & + & |\beta| & = 360° \end{array}$$

Wegen des Satzes über die Innenwinkelsumme für Dreiecke ist das nicht möglich.

Es gilt der folgende Satz:

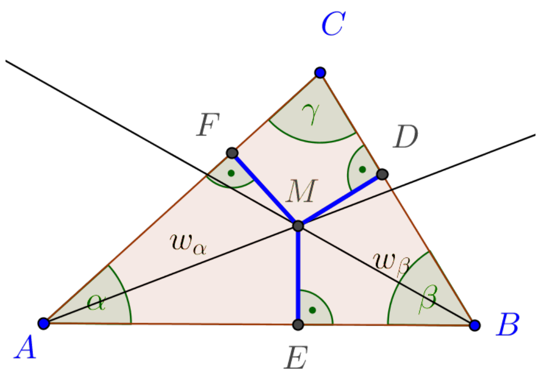
Satz 15 (*Winkelhalbierendenkriterium Teil* $(\rightarrow)$)

Wenn P ein Punkt der Winkelhalbierenden eines Winkels φ ist, dann hat P zu den Schenkeln von φ jeweils denselben Abstand.

Ebenso gilt die Umkehrung:

Satz 16 (*Winkelhalbierendenkriterium Teil* (←))

Wenn ein Punkt P zu den Schenkeln eines Winkels φ jeweils denselben Abstand hat, dann ist P ein Punkt der Winkelhalbierenden von φ.



(I)	$\overline{MF} \cong \overline{ME}$	$(\rightarrow), w_\alpha$
(II)	$\overline{ME} \cong \overline{MD}$	$(\rightarrow), w_\beta$
(III)	$\overline{MF} \cong \overline{MD}$	(I), (II), Transitivität
(IV)	$M \in w_\gamma$	$(\leftarrow)$ (III)

Lösung von Aufgabe 12.07

Definition 17 (*Dreieckshöhen*)

Unter den Höhen h_c, h_a, h_b eines Dreiecks $\overline{ABC}$ versteht man die folgenden Lote:

h_c *ist das Lot von*	C *auf*	AB
h_a *ist das Lot von*	A *auf*	BC
h_b *ist das Lot von*	B *auf*	AC

Lösung von Aufgabe 12.08

Korrekterweise müsste der Satz wie folgt formuliert werden: Die Geraden, die durch die Höhen eines Dreiecks eindeutig bestimmt sind, schneiden sich in genau einem Punkt.

Der Beweis wird auf den Satz über den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks zurückgeführt:
Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck. Wir konstruieren aus $\overline{ABC}$ ein größeres Dreieck, indem wir durch C eine Diagonale zu AB, durch A eine Parallele zu BC und durch B eine Parallele zu AC konstruieren. Hierdurch entsteht ein neues größeres Dreieck $\overline{A'B'C'}$. Die Mittelsenkrechten des Dreiecks $\overline{A'B'C'}$ sind die Höhengeraden des Dreiecks $\overline{ABC}$. Da sich die Mittelsenkrechten von $\overline{A'B'C'}$ in genau einem Punkt schneiden und die Mittelsenkrechten von $\overline{A'B'C'}$ identisch mit den Höhengeraden von $\overline{ABC}$ müssen sich die Höhengeraden auch in genau einem Punkt schneiden.

siehe MOOC chapter 13, G3

Lösung von Aufgabe 12.09

Definition 18 (*Peripheriewinkel*)

Wenn der Scheitel eines Winkels φ auf einem Kreis k liegt und die Schenkel von φ den Kreis k in jeweils einem Punkt schneiden, dann ist φ eine Peripheriewinkel von k.

Definition 19 (*Zentriwinkel*)

Ein Winkel φ ist eine Zentriwinkel eines Kreises k, wenn φ und k komplanar sind und der Scheitelpunkt von φ der Mittelpunkt von k ist.

Lösung von Aufgabe 12.10

Satz 20 (*Satz des Thales*)

Wenn der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks auf einer der Seiten des Dreiecks liegt, dann ist das Dreieck rechtwinklig.