Einführung in die Geometrie: Übungsserie 5

(Aufgaben zur Vorbereitung auf die Übungen in der Woche vom 17.05.-21.05.10)

Aufgabe 1:

Satz: Gegeben sei ein Dreieck ABC in einer Ebene E und eine Gerade g in dieser Ebene, die keine der drei Punkte A, B und C enthält.

Wenn g die Strecke $\overline{BC}$ schneidet, so schneidet sie auch entweder die Strecke $\overline{AB}$ oder die Strecke $\overline{AC}$.

a) Wie lautet die Kontraposition dieser Implikation?

b) Wie lautet die Annahme, wenn Sie diese Implikation durch einen Widerspruch beweisen möchten?

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgende Äquivalenz: Der Abstand zweier Punkte A und B ist genau dann 0, wenn A und B identisch sind.

a) Formulieren Sie die beiden Implikationen, die in dieser Aussage stecken.
b) Wie lauten jeweils die Kontrapositionen der beiden Implikationen?
c) Wie lauten die beiden Annahmen, wenn Sie diese Implikationen jeweils durch einen Widerspruch beweisen möchten?

Aufgabe 3:

Der Stufenwinkelsatz lautet: Die Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.

a) Wie lautet die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes?
b) Wie lautet die Kontraposition der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes?
c) Beweisen Sie die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises.

Aufgabe 4:

Wir haben in der Vorlesung den folgenden Satz kennen gelernt:
Jede Äquivalenzrelation R auf einer Menge M erzeugt auf M eine Klasseneinteilung.
Ergänzen Sie den nachstehenden Beweis:

<u>Voraussetzung:</u>

Konstruktion einer Zerlegung von M in eine Menge K von Teilmengen derart, dass:
a sei beliebiges Element von M. Alle Elemente b aus M zu denen a in Relation R steht gehören zur Teilmenge T_a von M.

$T_a := \{b \mid b \in M \wedge aRb\}$

Die Menge K ist die Menge aller Teilmengen vom M: $K := \{T_x \mid x \in M\}$

<u>Behauptung:</u>

K erfüllt die Eigenschaften einer Klasseneinteilung, d. h.:

1:

2:

3:

Zu 1:

Nr.	Beweisschritt	Begründung
1	$\{\ \} \notin K$	

Zu 2:

Nr.	Beweisschritt	Begründung
1	Wir betrachten: $T_a := \{c \mid c \in M \wedge aRc\}$ und $T_b := \{d \mid d \in M \wedge bRd\}$	
2	**Fall 1:** $\boldsymbol{aRb}$	
3	$T_b \subseteq T_a$	
4	$T_a \subseteq T_b$	
5	$T_a = T_b$	
6	**Fall 2:** $\neg(aRb)$	
7	**Annahme:**	
8	$\Rightarrow \exists c \in M : c \in T_a \wedge c \in T_b$	
9	$\Rightarrow aRc \wedge bRc$	
10	$\Rightarrow aRc \wedge cRb$	
11	$\Rightarrow aRb$	
12	**Widerspruch zu:**	

Zu 3:

Nr.	Beweisschritt	Begründung
1	$\bigcup T_i \in K = M$	