Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 12

(Lösungen)

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Es seien A, B und S drei nicht kollineare Punkte. Wenn P ein Punkt im Inneren des Winkels $\angle ASB$ ist und weder auf SB^+ noch auf SA^+ liegt, dann schneidet der Strahl SP^+ die Strecke $\overline{AB}$.

Beweis:

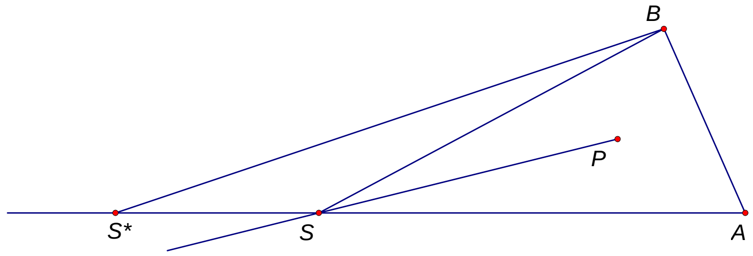
Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf die Ebene, die durch die drei Punkte A, B und S eindeutig bestimmt ist.

P sei ein Punkt im Inneren des Winkels $\angle ASB$.

<u>Fall 1:</u> S und P liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden AB.

- In diesem Fall schneidet die Strecke $\overline{SP}$ und damit der Strahl SP^+ die Gerade AB. Da der Strahl SP^+ (nach Satz im Tutorium 11) vollständig im Inneren von $\angle ASB$ liegt, kann er die Gerade AB nur in der Strecke $\overline{AB}$ schneiden.

<u>Fall 2:</u> S und P liegen auf derselben Seite von AB.



- Es sei S^* ein Punkt mit Zw(S^*,S,A).
- Die Gerade SP kann (wie leicht zu überlegen ist) durch keinen der Eckpunkte des Dreiecks ΔS^*AB verlaufen.
- Die Gerade SP hat mit der Seite $\overline{S^*A}$ des Dreiecks ΔS^*AB den Punkt S gemeinsam.
- Nach dem Axiom von Pasch muss entweder die Seite $\overline{AB}$ oder die Seite $\overline{S^*B}$ durch SP geschnitten werden. Zu zeigen ist, dass SP die Seite $\overline{AB}$ schneidet. (Weil $\overline{AB}$ im Inneren des Winkels $\angle ASB$ liegt, kann nur der Teil von SP, der im Inneren von $\angle ASB$ liegt, die Strecke $\overline{AB}$ schneiden. Dieser Teil ist aber gerade SP^+.)
- Wir nehmen (für einen indirekten Beweis) an, dass SP die Seite $\overline{S^*B}$ schneidet.
- $\overline{S^*A}$ wird wegen Zw(S^*,S,A) durch die Gerade SB geschnitten. Demzufolge liegen die Punkte S^* und A in verschiedenen Halbebenen bezüglich SB. Somit ist S^* kein Punkt aus dem Inneren von $\angle ASB$.
- Kein Punkt der Strecke $\overline{S^*B}$ (mit Ausnahme von B) kann ein Punkt der Geraden SB sein. (Ansonsten wären S^*, S und B und wegen Zw(S^*,S,A) auch S, A und B kollinear, was der Voraussetzung widerspräche.)
- Kein Punkt der Strecke $\overline{S^*B}$ liegt somit im Inneren des Winkels $\angle ASB$.
- Da (wie leicht zu überlegen ist) die Strecke $\overline{S^*B}$ nicht durch SP^- geschnitten werden kann und SP^+ und $\overline{S^*B}$ in verschiedenen Halbebenen liegen, kann SP die Strecke $\overline{S^*B}$ nicht schneiden.
- Nach dem Axiom von Pasch folgt nun, dass SP^+ die Strecke $\overline{AB}$ schneidet.