

Übungsaufgaben Einführung in die Geometrie, mathematische Grundlagen II, Serie 3 SoSe 2013

Gieding

06.05.2013 - 12.05.2013

Definitionen und Definieren

Aufgabe 3.01 SoSe 2013 S

Die Begriffe Winkel, Schenkel eines Winkels, Scheitel eines Winkels und Größe eines Winkels seien bereits mathematisch exakt definiert. Definieren Sie Form einer mathematisch korrekten Konventionaldefinitionen die Begriffe:

1. spitzer Winkel
2. rechter Winkel
3. stumpfer Winkel

Lösung von Aufgabe 3.01 SoSe 2013 S

1. Wenn die Größe eines Winkels α kleiner als 90° ist, dann ist α ein spitzer Winkel.
2. Wenn die Größe eines Winkels α 90° beträgt, dann ist α ein rechter Winkel.
3. Wenn die Größe eines Winkels α größer als 90° ist, dann ist α ein stumpfer Winkel.

Aufgabe 3.02 SoSe 2013 S

Die Begriffe Dreieck, Seiten eines Dreiecks, Eckpunkte eines Dreiecks und Innenwinkel eines Dreiecks seien bereits exakt definiert worden. Definieren Sie mathematisch korrekt die Begriffe:

1. rechtwinkliges Dreieck

2. Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks
3. Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks

Lösung von Aufgabe 3.02 SoSe 2013 S

1. Wenn ein Dreieck einen rechten Innenwinkel besitzt, dann wird das Dreieck rechtwinkliges Dreieck genannt.
2. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist die Seite des rechtwinkligen Dreiecks, zu der nicht der Scheitel des rechten Innenwinkels gehört.
3. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind die Seiten dieses Dreiecks, die nicht die Hypotenuse sind.

Aufgabe 3.03 SoSe 2013 S

Warum handelt es sich im Folgenden nicht um eine korrekte Definition? Es gibt Dreiecke, die nur spitze Innenwinkel haben, sie heißen spitzwinklige Dreiecke.

Lösung von Aufgabe 3.03 SoSe 2013 S

Es gibt Dreiecke ist ein Existenzaussage, die zu beweisen wäre. Definitionen sind keine Aussagen (sind weder wahr noch falsch).

Aufgabe 3.04 SoSe 2013 S

Für die Schule hat man sich auf eine besondere Art der Bezeichnung der Stücke von Dreiecken geeinigt.

1. Die Innenwinkel werden mit α, β, γ bezeichnet.
2. Die Eckpunkte des Dreiecks werden mit den großen lateinischen Buchstaben A, B, C bezeichnet.
3. Die Dreieckseiten werden mit den kleinen lateinischen Buchstaben a, b, c bezeichnet.
4. Es besteht eine Korrelation zwischen den Bezeichnungen dieser Dreieckstücke und ihrer Lage zueinander.

Definieren Sie den Begriff allgemeine schulübliche Dreieckbezeichnungen.

Lösung von Aufgabe 3.04 SoSe 2013 S

Die schulüblichen Bezeichnungen eines Dreiecks wurden wie folgt festgelegt:

- (I) Die Eckpunkte des Dreiecks werden in mathematisch positivem Umlaufsinn mit den großen lateinischen Buchstaben A , B und C bezeichnet.
- (II) Die Seite, die dem Punkt A gegenüberliegt wird a genannt, b ist die Seite, die dem Punkt B gegenüberliegt und die dem Punkt C gegenüberliegende Seite wird mit c bezeichnet.
- (III) Der Innenwinkel mit dem Scheitel A wird α genannt, der Innenwinkel mit dem Scheitel B wird β genannt und schließlich wird der Innenwinkel mit dem Scheitel C mit γ bezeichnet.

Aufgabe 3.05 SoSe 2013 S

Definieren Sie die Begriffe:

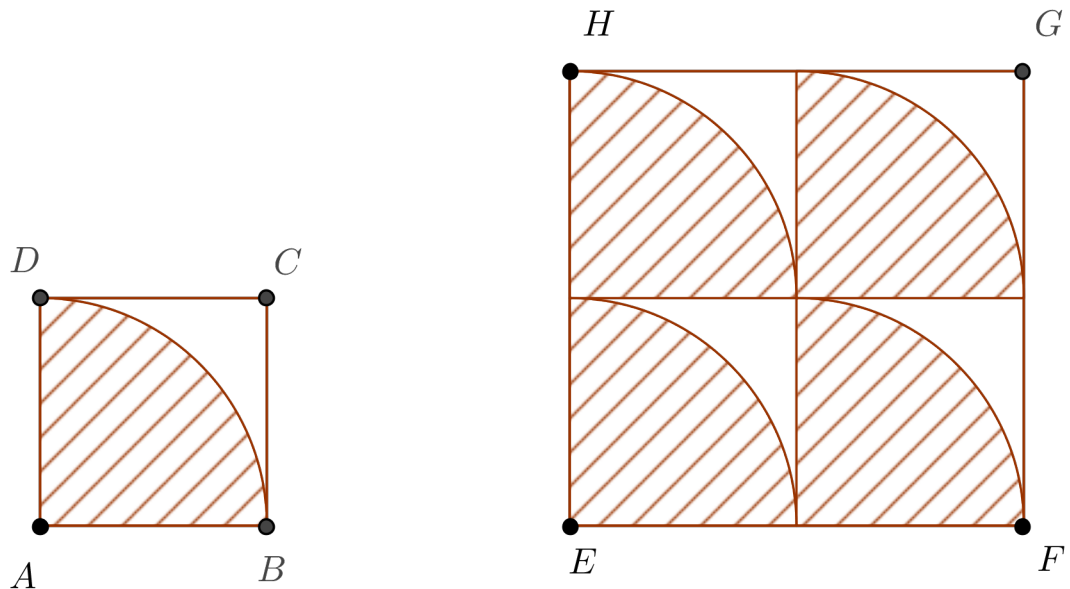
1. gleichschenkliges Dreieck,
2. Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks,
3. Basis eines gleichschenkligen Dreiecks,
4. Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks.

Lösung von Aufgabe 3.05 SoSe 2013 S

1. Ein Dreieck mit zwei gleichlangen Seiten heißt gleichschenkliges Dreieck.
2. Die beiden gleichlangen Seiten heißen Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks.
3. Die dritte Seite heißt Basis des gleichschenkligen Dreiecks.
4. Die Innenwinkel, deren Scheitel die Endpunkte der Basis sind, heißen Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks.

Implikationen, Begründen und Beweisen

Aufgabe 3.06 SoSe 2013 S



$\overline{ABCD}$ und $\overline{EFGH}$ seien Quadrate. Die einzelnen schraffierten Punktmengen seien das Innere von Viertelkreisen.

Beweisen Sie: Der prozentuale Anteil der schraffierten Flächen in Bezug auf die Fläche des jeweiligen Quadrats $\overline{ABCD}$ bzw. $\overline{EFGH}$ ist gleich.

Lösung von Aufgabe 3.06 SoSe 2013 S

- Es sei $\overline{ABCD}$ ein Quadrat und k_4 ein eingebetteter Viertelkreis entsprechend obiger Skizze.
- Der Radius von k_4 ist die Seitenlänge von $\overline{ABCD}$ und möge die Länge a haben.
- Der Flächeninhalt A_4 von k_4 berechnet sich zu $A_4 = \frac{\pi}{4}a^2$.
- Der Flächeninhalt A_Q des Quadrates berechnet sich zu $A_Q = a^2$.
- Der Anteil des Viertelkreises am Flächeninhalt des Quadrates berechnet sich zu $\frac{A_4}{A_Q} = \frac{\frac{\pi}{4}a^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}$

- Der Anteil der Fläche des Viertelkreises an der Fläche des Quadrates ist von der Seitenlänge des Quadrates unabhängig.
- Bei vier kongruenten Quadraten mit entsprechenden Viertelkreisen berechnet sich der Anteil der Fläche der Kreise zur Fläche der Quadrate wie folgt:
 $\frac{4 \cdot A_4}{4 \cdot A_Q} = \frac{\pi \cdot a^2}{4 \cdot a^2} = \frac{\pi}{4}$. (Wäre auch einfacher gegangen.)

Bei praktischen Problemen (Holzlagerung, Viertelstamm, schätzen wir mit $\frac{3}{4} = 75\%$ ab.

Aufgabe 3.07 SoSe 2013 S

Gegeben sei ein Dreieck $\overline{ABC}$ mit dem Umkreis k . Der Mittelpunkt von k möge ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$ sein. Der Winkel $\angle CAB$ habe die Größe 25° . Berechnen Sie die folgenden Winkelgrößen:

1. $|\angle ACM|$
2. $|\angle AMC|$
3. $|\angle CMB|$
4. $|\angle ABC|$
5. $|\angle MCB|$
6. $|\angle ACB|$

Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Berechnungen ausschließlich unter Verwendung der folgenden Sätze:

1. Innenwinkelsatz für Dreiecke
2. Nebenwinkelsatz
3. Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke

Lösung von Aufgabe 3.07 SoSe 2013 S

1. $|\angle ACM| = |\angle CAB| = 25^\circ$ (Basiswinkelsatz)
2. $|\angle AMC| = 180^\circ - 2 \cdot 25^\circ = 130^\circ$ (Innenwinkelsatz)
3. $|\angle CMB| = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ (Nebenwinkelsatz)
4. $|\angle ABC| = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$ (Innenwinkelsatz, Basiswinkelsatz).

5. $|\angle MCB| = |\angle ABC| = 65^\circ$ (Basiswinkelsatz)
6. $|\angle ACB| = |\angle MCB| + |\angle ACM| = 65^\circ + 25^\circ = 90^\circ$

Aufgabe 3.08 SoSe 2013 S

Formulieren Sie den Satz des Pythagoras in der Form Wenn-Dann. Nennen Sie dann noch einmal explizit die Voraussetzung und die Behauptung des Satzes.

Lösung von Aufgabe 3.08 SoSe 2013 S

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann ist die Summe der Quadrate der Kathetenlängen gleich dem Quadrat der Länge der Hypotenuse.

Aufgabe 3.09 SoSe 2013 S

Unter der Umkehrung einer Implikation $a \Rightarrow b$ versteht man die Implikation $b \Rightarrow a$ (Voraussetzung und Behauptung werden getauscht).

1. Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes von Pythagoras
2. Entscheiden Sie (ohne Beweis), ob die Umkehrung des Satzes von Pythagoras eine wahre Aussage ist.
3. Oberstudienrätin Schultze-Kröttendörfer läßt ihre 9a die Seiten von Dreiecken vermessen, Quadrate der gemessenen Dreieckseiten bilden, diese Quadrate in geeigneter Weise addieren und vergleichen. Aus diesen Vergleichen sollen die Schüler explizit entscheiden, ob die untersuchten Dreiecke rechtwinklig sind oder nicht. Wenden die Schüler zu dieser Entscheidung den Satz des Pythagoras oder seine Umkehrung an? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung von Aufgabe 3.09 SoSe 2013 S

1. Wenn die Summe der Quadrate der Längen der beiden kürzeren Seiten eines Dreiecks gleich dem Quadrat der Länge der längsten Seite dieses Dreiecks ist, dann ist das Dreieck gleichschenkelig.
2. Sie ist wahr. Der Satz des Pythagoras und seine Umkehrung sind ein Kriterium dafür, ob Dreiecke rechtwinklig sind.
3. Aus den Seitenlängen wird explizit auf den rechten Winkel geschlossen: Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

Aufgabe 3.10 SoSe 2013 S

Der Satz des Pythagoras sei bewiesen. Formulieren Sie nun den Höhensatz des Euklid und beweisen Sie ihn nur unter Verwendung des Satzes von Pythagoras und der Regeln des Rechnens mit reellen Zahlen. (Skizzen helfen)

Lösung von Aufgabe 3.10 SoSe 2013 S

Es seien a und b die beiden Katheten, die Hypotenuse sei c . Die Höhe h_c wollen wir kurz h nennen. Die beiden Hypotenusenabschnitte seien q und p .

$$h^2 + p^2 = b^2 \quad (1)$$

$$h^2 + q^2 = a^2 \quad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (3)$$

$$c^2 = h^2 + p^2 + h^2 + q^2 \quad (4)$$

$$(q + p)^2 = h^2 + p^2 + h^2 + q^2 \quad (5)$$

$$q^2 + 2qp + p^2 = h^2 + p^2 + h^2 + q^2 \quad (6)$$

$$2qp = 2h^2 \quad (7)$$

$$qp = h^2 \quad (8)$$