

Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 13 (Lösungen)

1. Beweisen Sie: Jeder Winkel besitzt genau eine Winkelhalbierende.

Lösung:

- (a) **Existenz der Winkelhalbierenden:** Gegeben sei ein beliebiger Winkel $\angle ASB$. Es ist zu zeigen, dass es einen Strahl SP^+ gibt, so dass $|\angle SA^+SP^+| + |\angle SP^+SB^+| = |\angle ASB|$ und $|\angle AS^+SP^+| = |\angle SP^+SB^+|$ gilt. Nach Axiom W1 ist $|\angle ASB|$ eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Demzufolge ist $\frac{|\angle ASB|}{2}$ ebenfalls eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Axiom W2 liefert uns in der Halbebene ASB^+ einen Strahl SP^+ so, dass $|\angle SA^+SP^+| = \frac{|\angle ASB|}{2}$ gilt. Wenn wir zeigen könnten, dass der Punkt P im Inneren des Winkels liegt, wären wir im Prinzip fertig. Dann würde nämlich

nach Axiom W3 $|\angle AS^+SP^+| + |\angle SP^+SB^+| = |\angle ASB|$ folgen. Unter Berücksichtigung von $|\angle SA^+SP^+| = \frac{|\angle ASB|}{2}$, wäre dann auch $|\angle SP^+SB^+| = \frac{|\angle ASB|}{2}$ und somit $|\angle SA^+SP^+| = |\angle SP^+SB^+|$.

Um zu zeigen, dass P ein Punkt im Inneren ist, führen wir den Beweis indirekt. Wir nehmen also an, dass der Punkt P nicht im Inneren des Winkels $\angle ASB$ liegt. In diesem Fall wäre der Punkt B ein Punkt im Inneren des Winkels $\angle ASP$. Nach Satz „Gegeben seien drei Strahlen p , q und r , die in ein und derselben Ebene liegen und den gemeinsamen Anfangspunkt S haben. Wenn der Strahl r innerhalb des Winkels $\angle pq$ liegt, dann sind die Winkel $\angle pr$ und $\angle rq$ kleiner als der Winkel $\angle pq$.“ müsste jetzt $|\angle ASB| < |\angle ASP|$ sein. Das ist jedoch ein Widerspruch zu $|\angle ASP| = \frac{|\angle ASB|}{2} < |\angle ASB|$. Die Annahme, dass P nicht im Inneren des Winkels $\angle ASB$ liegt, ist also zu verwerfen. Die Existenz der Winkelhalbierenden zu einem beliebigen Winkel ist somit gezeigt.

- (b) **Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden:** Um die Eindeutigkeit der Winkelhalbierende zu zeigen, nehmen wir an, dass zu einem Winkel $\angle pq$ zwei verschiedene Winkelhalbierende w_1 und w_2 existieren. Die Winkel $\angle pw_1$ und $\angle pw_2$ hätten dann das gleiche Maß und zwar $\frac{|\angle pq|}{2}$. Nach Axiom W2 können die beiden Strahlen w_1 und w_2 nicht verschieden sein. Also ist unsere Annahme zu verwerfen. Die Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden ist somit bewiesen.

2. Beweisen Sie folgenden Satz:

Gegeben sei ein (nicht gestreckter) Winkel $\angle AOB$, es sei $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ und $P \in \overline{AB}$. Dann ist OP^+ genau dann Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$, wenn P Mittelpunkt von \overline{AB} ist.

Beweis:

Es sind 2 Richtungen zu beweisen.

(\Rightarrow) Wenn OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ ist, so ist P Mittelpunkt von \overline{AB} .

- Die Dreiecke $\triangle AOP$ und $\triangle BOP$ sind nach Axiom IV/5 kongruent:
 - Da OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ ist, gilt definitionsgemäß $\angle AOP \equiv \angle BOP$;
 - $|OP| = |OP|$;
 - $|OA| = |OB|$ (nach Voraussetzung).
- Somit gilt $|AP| = |BP|$ und wegen $P \in \overline{AB}$ ist P daher Mittelpunkt von \overline{AB} .

(\Leftarrow) Wenn P Mittelpunkt von \overline{AB} ist, so ist OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$.

- Falls OP^+ nicht Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ wäre, so müsste nach dem Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden eine andere Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ existieren. Diese müsste nach Lemma 1 die Strecke \overline{AB} in einem Punkt schneiden, der mit S bezeichnet sei.
- Nach dem bereits bewiesenen Teil (\Rightarrow) folgt daraus, dass S Mittelpunkt von \overline{AB} ist.
- Nach einem in Übungsserie 5 bewiesenen Satz besitzt jede Strecke *genau* einen Mittelpunkt.
- Somit gilt $S = P$ und daher ist OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$.

Alternativ kann dieser Teil auch über den Kongruenzsatz sss bewiesen werden!