

2 Beispiele und Gegenbeispiele für Gruppen Teil 2

2.1 Gruppendefinition

Definition 2.1

Algebraische Gruppe:

Es sei G eine nichtleere Menge auf der eine zweistellige Operation \circ definiert ist. $[G, \circ]$ heißt Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Abgeschlossenheit von \circ auf G
 $\forall a, b \in G : a \circ b \in G$
2. Assoziativität von \circ auf G
 $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
3. Existenz des Neutral bzw. Einselementes in G bzgl. \circ
 $\exists e \in G \forall a \in G : a \circ e = e \circ a = a$
4. Existenz der inversen Elemente zu jedem Element aus G
 $\forall a \in G \exists a^{-1} : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Sollte ferner $\forall a, b \in G a \circ b = b \circ a$ gelten, so heißt $[G, \circ]$ kommutative bzw. abelsche¹ Gruppe.

2.2 Die symmetrische Gruppe S_4

Definition 2.2

Bijektion

Eine eindeutige Abbildung von einer Menge A auf eine Menge B heißt Bijektion.

Definition 2.3

Permutation

Eine Bijektion einer Menge auf sich selbst heißt Permutation.

Satz 2.1

Anzahl von Permutationen einer n -elementigen Menge

Es sei M eine Menge mit $|M| = n$. Die Anzahl der verschiedenen Permutationen von M auf sich selbst beträgt $n!$.

Aufgabe 2.1

Beweis von Satz 2.1

Beweisen Sie Satz 2.1.

Es sei $M = \{A, B, C, D\}$ eine vierelementige Menge. Wir generieren systematisch alle Permutationen von M auf sich selbst. Das Schema erkennen Sie sicher selbst und haben damit die Grundlage für den Beweis von Satz 2.1.

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C | D |
| 2 | A | B | D | C |
| 3 | A | C | B | D |
| 4 | A | C | D | B |
| 5 | A | D | B | C |
| 6 | A | D | C | B |
| 7 | B | A | C | D |
| 8 | B | A | D | C |
| 9 | B | C | A | D |
| 10 | B | C | D | A |
| 11 | B | D | A | C |
| 12 | B | D | C | A |
| 13 | C | B | A | D |
| 14 | C | B | D | A |
| 15 | C | A | B | D |
| 16 | C | A | D | B |
| 17 | C | D | B | A |
| 18 | C | D | A | B |
| 19 | D | B | C | A |
| 20 | D | B | A | C |
| 21 | D | C | B | A |
| 22 | D | C | A | B |
| 23 | D | A | B | C |
| 24 | D | A | C | B |

Wir führen je zwei Permutationen nacheinander aus und erhalten die folgende Verknüpfungstafel:

Aufgabe 2.2

Deckabbildungen des Quadrates

Eine Teilmenge der S_4 lässt sich als Deckabbildungen des Quadrates kennzeichnen. Benennen Sie alle Permutationen der S_4 , die als Deckabbildungen des Quadrates interpretiert werden können und stellen. Die Menge der Permutationen, die als Deckabbildungen des Quadrates interpretiert werden können ist bezüglich der NAF von Abbildungen selbst eine Gruppe. Stellen Sie die Gruppentafel auf.

Zur Lösung hier eine leere Tabelle:

| | | | | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|
| o | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

Die Darstellung der S_4 ist in der angegebenen Form recht unübersichtlich. Wir kodieren wie folgt:

| | | | |
|------|----|------|----|
| ABCD | 1 | CBAD | 13 |
| ABDC | 2 | CBDA | 14 |
| ACBD | 3 | CABD | 15 |
| ACDB | 4 | CADB | 16 |
| ADBC | 5 | CDBA | 17 |
| ADCB | 6 | CDAB | 18 |
| BACD | 7 | DBCA | 19 |
| BADC | 8 | DBAC | 20 |
| BCAD | 9 | DCBA | 21 |
| BCDA | 10 | DCAB | 22 |
| BDAC | 11 | DABC | 23 |
| BDCA | 12 | DACB | 24 |

Mit dieser Kodierung stellt sich die S_4 wie folgt dar:

| ◦ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 2 | 2 | 1 | 4 | 3 | 6 | 5 | 8 | 7 | 10 | 9 | 12 | 11 | 14 | 13 | 16 | 15 | 18 | 17 | 20 | 19 | 22 | 21 | 24 | 23 |
| 3 | 3 | 5 | 1 | 6 | 2 | 4 | 9 | 11 | 7 | 12 | 8 | 10 | 15 | 17 | 13 | 18 | 14 | 16 | 21 | 23 | 19 | 24 | 20 | 22 |
| 4 | 4 | 6 | 2 | 5 | 1 | 3 | 10 | 12 | 8 | 11 | 7 | 9 | 16 | 18 | 14 | 17 | 13 | 15 | 22 | 24 | 20 | 23 | 19 | 21 |
| 5 | 5 | 3 | 6 | 1 | 4 | 2 | 11 | 9 | 12 | 7 | 10 | 8 | 17 | 15 | 18 | 13 | 16 | 14 | 23 | 21 | 24 | 19 | 22 | 20 |
| 6 | 6 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 | 12 | 10 | 11 | 8 | 9 | 7 | 18 | 16 | 17 | 14 | 15 | 13 | 24 | 22 | 23 | 20 | 21 | 19 |
| 7 | 7 | 8 | 15 | 16 | 23 | 24 | 1 | 2 | 13 | 14 | 20 | 19 | 9 | 10 | 3 | 4 | 21 | 22 | 12 | 11 | 17 | 18 | 5 | 6 |
| 8 | 8 | 7 | 16 | 15 | 24 | 23 | 2 | 1 | 14 | 13 | 19 | 20 | 10 | 9 | 4 | 3 | 22 | 21 | 11 | 12 | 18 | 17 | 6 | 5 |
| 9 | 9 | 11 | 13 | 18 | 20 | 22 | 3 | 5 | 15 | 17 | 23 | 21 | 7 | 12 | 1 | 6 | 19 | 24 | 10 | 8 | 14 | 16 | 2 | 4 |
| 10 | 10 | 12 | 14 | 17 | 19 | 21 | 4 | 6 | 16 | 18 | 24 | 22 | 8 | 11 | 2 | 5 | 20 | 23 | 9 | 7 | 13 | 15 | 1 | 3 |
| 11 | 11 | 9 | 18 | 13 | 22 | 20 | 5 | 3 | 17 | 15 | 21 | 23 | 12 | 7 | 6 | 1 | 24 | 19 | 8 | 10 | 16 | 14 | 4 | 2 |
| 12 | 12 | 10 | 17 | 14 | 21 | 19 | 6 | 4 | 18 | 16 | 22 | 24 | 11 | 8 | 5 | 2 | 23 | 20 | 7 | 9 | 15 | 13 | 3 | 1 |
| 13 | 13 | 20 | 9 | 22 | 11 | 18 | 15 | 23 | 3 | 21 | 5 | 17 | 1 | 19 | 7 | 24 | 12 | 6 | 14 | 2 | 10 | 4 | 8 | 16 |
| 14 | 14 | 19 | 10 | 21 | 12 | 17 | 16 | 24 | 4 | 22 | 6 | 18 | 2 | 20 | 8 | 23 | 11 | 5 | 13 | 1 | 9 | 3 | 7 | 15 |
| 15 | 15 | 23 | 7 | 24 | 8 | 16 | 13 | 20 | 1 | 19 | 2 | 14 | 3 | 21 | 9 | 22 | 10 | 4 | 17 | 5 | 12 | 6 | 11 | 18 |
| 16 | 16 | 24 | 8 | 23 | 7 | 15 | 14 | 19 | 2 | 20 | 1 | 13 | 4 | 22 | 10 | 21 | 9 | 3 | 18 | 6 | 11 | 5 | 12 | 17 |
| 17 | 17 | 21 | 12 | 19 | 10 | 14 | 18 | 22 | 6 | 24 | 4 | 16 | 5 | 23 | 11 | 20 | 8 | 2 | 15 | 3 | 7 | 1 | 9 | 13 |
| 18 | 18 | 22 | 11 | 20 | 9 | 13 | 17 | 21 | 5 | 23 | 3 | 15 | 6 | 24 | 12 | 19 | 7 | 1 | 16 | 4 | 8 | 2 | 10 | 14 |
| 19 | 19 | 14 | 21 | 10 | 17 | 12 | 24 | 16 | 22 | 4 | 18 | 6 | 20 | 2 | 23 | 8 | 5 | 11 | 1 | 13 | 3 | 9 | 15 | 7 |
| 20 | 20 | 13 | 22 | 9 | 18 | 11 | 23 | 15 | 21 | 3 | 17 | 5 | 19 | 1 | 24 | 7 | 6 | 12 | 2 | 14 | 4 | 10 | 16 | 8 |
| 21 | 21 | 17 | 19 | 12 | 14 | 10 | 22 | 18 | 24 | 6 | 16 | 4 | 23 | 5 | 20 | 11 | 2 | 8 | 3 | 15 | 1 | 7 | 13 | 9 |
| 22 | 22 | 18 | 20 | 11 | 13 | 9 | 21 | 17 | 23 | 5 | 15 | 3 | 24 | 6 | 19 | 12 | 1 | 7 | 4 | 16 | 2 | 8 | 14 | 10 |
| 23 | 23 | 15 | 24 | 7 | 16 | 8 | 20 | 13 | 19 | 1 | 14 | 2 | 21 | 3 | 22 | 9 | 4 | 10 | 5 | 17 | 6 | 12 | 18 | 11 |
| 24 | 24 | 16 | 23 | 8 | 15 | 7 | 19 | 14 | 20 | 2 | 13 | 1 | 22 | 4 | 21 | 10 | 3 | 9 | 6 | 18 | 5 | 11 | 17 | 12 |

Aufgabe 2.3

Eindeutige Lösbarkeit von $a \circ x = y$ in der S_4

Untersuchen Sie, wie oft jedes Element der S_4 in jeder Zeile und jeder Spalte der Verknüpfungstafel auftaucht. Was hat Ihr Untersuchungsergebnis mit der Aufgabenüberschrift zu tun?

Aufgabe 2.4

Vierergruppen

Es sei $G = \{e, a, b, c\}$ eine vierelementige Menge und \odot eine Verknüpfung auf G . Generieren Sie alle möglichen Gruppentafeln für $[G, \odot]$.

Hinweis: Ihr Untersuchungsergebnis aus Aufgabe 2.3 gilt für jede Gruppe.

Leere Tabellen zur Hilfe:

| \odot | e | a | b | c |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| e | | | | |
| a | | | | |
| b | | | | |
| c | | | | |

| \odot | e | a | b | c |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| e | | | | |
| a | | | | |
| b | | | | |
| c | | | | |

| \odot | e | a | b | c |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| e | | | | |
| a | | | | |
| b | | | | |
| c | | | | |

| \odot | e | a | b | c |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| e | | | | |
| a | | | | |
| b | | | | |
| c | | | | |