

Didaktische Aspekte des Sachrechnens



(Foto: Anton, GNU)

Sachrechnen?

- Sachrechenaufgabe, ja oder nein?
- Ziele des Sachrechnens
- Was ist Sachrechnen?

Sachrechenaufgabe, ja oder nein?

Entscheiden Sie, ob es sich Ihrer Meinung nach bei den folgenden „typischen“ Beispielen um Sachrechenaufgaben handelt oder nicht:

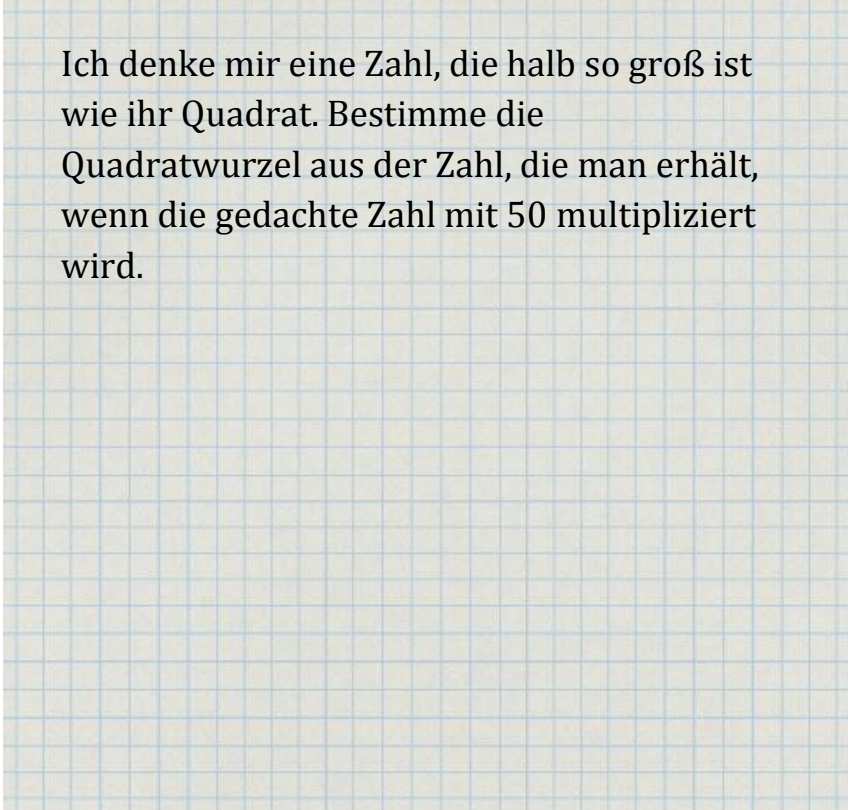
Sachrechenaufgabe	keine Sachrechenaufgabe
Herr Meier fuhr im Jahr 2010 an 347 Tagen mit seinem Mountainbike der Marke „Focus“ von Leimen auf den Königsstuhl. Wie alt wird Herr Maier im Jahr 2011?	$\sin(30^\circ) =$

Beispiel 1: geschicktes Rechnen

Berechne möglichst vorteilhaft:

$$53 \cdot 17 + 47 \cdot 17$$

Beispiel 2: „Ich denke mir eine Zahl“



Ich denke mir eine Zahl, die halb so groß ist
wie ihr Quadrat. Bestimme die
Quadratwurzel aus der Zahl, die man erhält,
wenn die gedachte Zahl mit 50 multipliziert
wird.

Beispiel 3: „Brunnen 1“

(<http://www.matheboard.de/archive/43027/thread.html>)

Schwere Brunnenaufgabe

ich habe wider mal eine nette mathe aufgabe bekommen
(wobei ich glaube, dass unser mathelehrer mathe mit
physik verwechselt). problem ist, dass ich nicht genau
weiss, wie man sie löst deshalb brauche ich dringent hilfe
aufgabe:

auf der marienwiese in würzburg befindet sich ein
brunnen. um seine tiefe fest zustellen, lässt man einen stein
hineinfallen und misst die zeit, bis man den aufschlag hört:
 $t=5\text{s}$. wie tief ist der brunnen? ($v_{\text{schall}}=340\text{m/s}$).

wie rechne ich sowas??? er sagt es ginge mit der pq formel
aber was brauch ich dafür??? könnt ihr mir helfen??

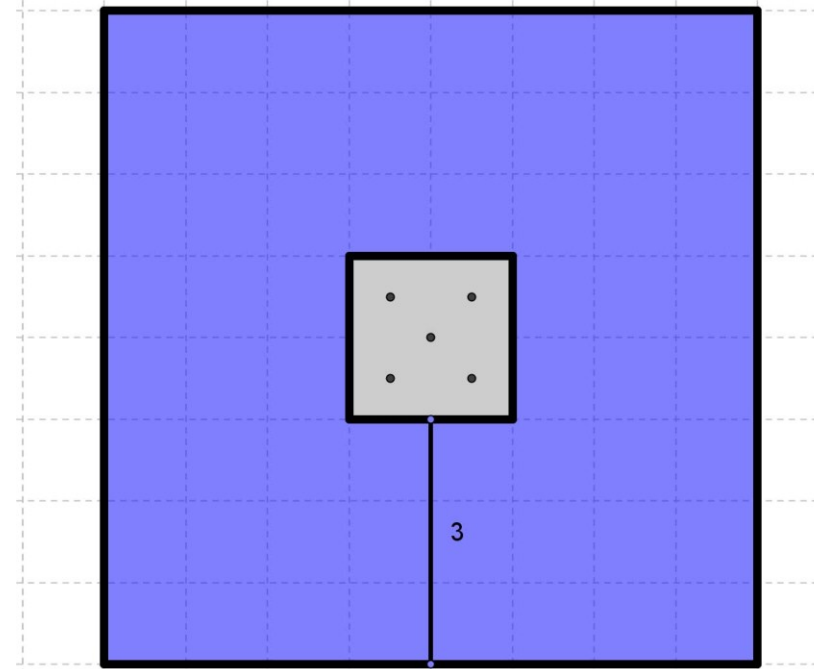
Beispiel 4: „Brunnen 2“

Auf dem Marktplatz befindet sich ein Springbrunnen, der die Form eines oben offenen quadratischen Prismas hat. Die Seitenlänge der Grundfläche hat die Länge 8m. Das Prisma ist vollständig mit Wasser gefüllt. In seiner Mitte befindet sich ein Betonwürfel in den die 5 Sprühköpfe des Springbrunnens eingelassen sind. Der Betonwürfel hat die Kantenlänge 2m.

Einer der Sprühköpfe ist defekt. Zu seiner Reparatur wurde der Springbrunnen außer Betrieb gesetzt.

Der Installateur, der den Sprühkopf reparieren soll, darf nicht das verbliebene Wasser aus dem Brunnen ablassen.

Kann er den Sprühkopf reparieren ohne nass zu werden? Ihm stehen zwei Bohlen zur Verfügung, die jeweils eine Länge von 2,90 Meter haben.



Beispiel 5: „Klavierstimmer“

Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?



Beispiel 6: „Bundesschatzbrief“

Die Erben einer am 31.12. Verstorbenen, die Bundesschatzbriefe Typ B in ihrem Wertpapierdepot verwahren und verwalten ließ, veräußern diese. Das Finanzamt verlangt von den Erben rückwirkend für die Dauer der Anlage die Angabe der gesamten Zinserträge und das jeweilige Guthaben zum 1.1. eines jeden Jahres, sowie am Todestag. Aus den Nachlassunterlagen gehen diese Angaben nur bruchstückhaft hervor.

Berechne die vom Finanzamt geforderten Angaben, indem du die folgende Tabelle Zeile für Zeile von rechts unten nach links oben ausfüllst. Die Reihenfolge der Spalten der Tabelle sind gegenüber der üblichen Reihenfolge aus Aufgabe 3. verändert, um die Rechnung zu vereinfachen.

	Zinsen in €	altes Guthaben in €	Zinssatz in %	neues Guthaben in €
1. Jahr der Laufzeit				
2. Jahr der Laufzeit				
3. Jahr der Laufzeit				
4. Jahr der Laufzeit				
5. Jahr der Laufzeit	3891,99	91	576,35	4,25%



Beispiel 7: „Tilgung“

Hans nimmt für den Kauf eines Mofas einen
Verbrauchercredit in Höhe von 2500 € bei der Spaßkasse
auf.

Im Gespräch mit dem Spaßkassenangestellten fällt der
Begriff der Tilgung.

Kannst du Hans erklären, was darunter zu verstehen ist?

Beispiel 8: „Kartoffelaufgabe 1“

Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 50 DM.

Die Erzeugerkosten betragen 40 DM. Berechne den Gewinn!

(Realschule 1960)

Beispiel 9: „Kartoffelaufgabe 2“

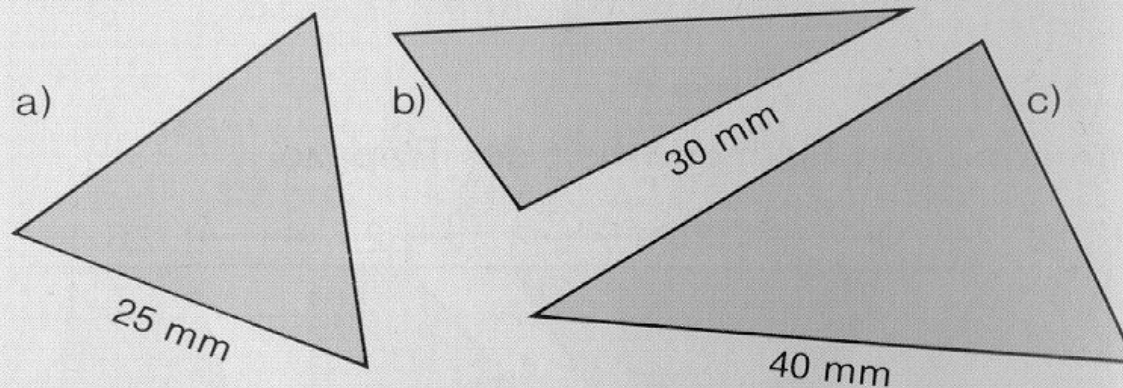
Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 50,- €. Die Erzeugerkosten betragen 40,- €. Der Gewinn beträgt 10,- €. Unterstreiche das Wort "Kartoffeln" und diskutiere mit deinen 15 Mitschülern aus anderen Kulturkreisen darüber. Waffen sind dabei nicht erlaubt.

mehr? guckst du hier: http://www.poegot.org/www_seite/Ma_lehrer/kartoffel_aufgabe.pdf

Beispiel 10: „Geometrie“

Ü4

Miße die zugehörige Höhe und berechne den Flächeninhalt.



Ü5

Ein Dreieck hat einen Flächeninhalt von 48 cm. Seine Breite beträgt 4 cm (8 cm, 12 cm, 15 cm). Berechne seine Höhe.

Didaktische Aspekte des Sachrechnens

Sachrechnen?

Sachrechnenaufgabe, ja oder nein?

Auswertung

Sachrechnenaufgabe	keine Sachrechnenaufgabe	weiß nicht

Arten von Aufgaben mit textlichen Anteilen

1. Eingekleidete Aufgaben
2. Textaufgaben
 - a. Bürgerliches Rechnen
3. Sachaufgaben
4. Fermiaufgaben
5. Modellierungsaufgaben

Eingekleidete Aufgaben

Beispiel

Ein Kilo Äpfel kostet 5,40 €. Wie viel kosten 7 Kilo Äpfel.

Merkmale

- „künstlich“ konstruierter Sachbezug
- Schwerpunkt der Bearbeitung der Aufgabe liegt auf den Rechenoperationen und dem Anwenden von Verfahren (etwa Dreisatz)

Textaufgaben

Beispiel



a) Fülle die Tabelle für die ersten fünf Jahre.

Zeit	Anfangskapital	Zinsen	Endkapital
1 Jahr	8000	320	8320
2 Jahre	8320	332,80	
3 Jahre			
4 Jahre			
5 Jahre			

b) Berechne mit dem Taschenrechner den Kontostand nach 18 Jahren.

1,04	×	8000	=	=	=	=	=	---
------	---	------	---	---	---	---	---	-----

Merkmale

- Aufgabe, deren Lösung die Diskussion außerschulischer Sachverhalte zwangsweise einschließt.
- Ziele:
 - Steigerung der Rechenfertigkeiten;
 - Entwicklung der Fähigkeiten im Erkennen der notwendigen Rechenoperationen,
 - Entwicklung der Fähigkeiten im Erkennen der richtigen Reihenfolge der notwendigen Rechenoperationen.

noch ein Beispiel

Magdalena möchte Landschaftsgärtnerin werden und macht im Schlosspark ein Praktikum.

In der Mitte des Gartens stehen 3 Eichen. Magdalena erhält die Aufgabe, einen kreisförmigen Weg zu planen, der an jeder der drei Eichen vorbeiführt.

also: auch geometrische Probleme können sich in Textaufgaben widerspiegeln.

Bürgerliches Rechnen

„In der Diskussion über Zielsetzungen und Legitimation des Unterrichtsfaches Mathematik stellt sich immer wieder die Frage nach dem Verhältnis von Anwendungen der Mathematik und im Alltag benötigtem Wissen einerseits und einer mehr formalen Bildung durch Mathematik andererseits. In der älteren Rechendidaktik wurde diese Frage meist so beantwortet, dass man zumindest für Grund- und Hauptschulen das sogenannte Sachrechnen als „bürgerliches Rechnen“ und somit die im „täglichen Leben“ benötigten Rechentechniken in den Vordergrund stellte und eine Hinführung zu abstrakterem mathematischen Denken vorwiegend als Aufgabe des Gymnasiums ansah.“

[Strehl R; Seite 7]¹

Sachrechnen nur als „bürgerliches Rechnen“, zu dem man u.a. die Prozentrechnung, die Zinsrechnung, die Gewinn- und Verlust-Rechnung, den Dreisatz, die Mischungsrechnung, die Verhältnisrechnung, etc. zählt, aufzufassen, wäre zu eng und dem gegenwärtigen Stand der fachdidaktischen Diskussion nicht angemessen.

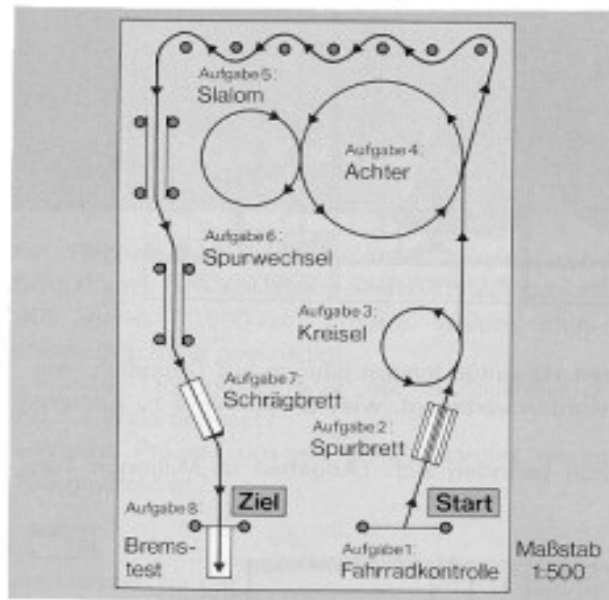
¹ Strehl R. (1979) Studienbücher Mathematik Didaktik – Grundprobleme des Sachrechnens. Freiburg Basel Wien.

Sachrechnen

Beispiel

6

Die Grund- und Hauptschule Forst plant für ihre Schüler einen Fahrradwettbewerb. Der ADAC macht dafür folgenden Vorschlag:



- Wie lang und wie breit muß der Schulhof sein, damit die Hindernisse so aufgebaut werden können?
- Welche Fläche wird benötigt. Rechne in m^2 und in a.
- Welchen Durchmesser hat der Kreis beim „Kreisell“, wie groß ist der Radius bei den Kreisen des „Achters“?
- Der Schulhof einer Schule ist nur 30 m lang und 16 m breit. Entwirf einen Fahrradparcours. Zeichne im Maßstab 1:200.
- Der Schulleiter rechnet damit, daß jeder Schüler durchschnittlich $2\frac{1}{2}$ Minuten für die Strecke benötigt.

Klasse	Anzahl der Schüler
5	32
6	31
7	28
8	29

Stelle einen Zeitplan auf, daß an einem Tag alle Schüler fahren können. Der Wettbewerb soll um 8.30 Uhr beginnen.

- Die Fahrradkontrolle, die von der Polizei durchgeführt wurde, brachte folgendes Ergebnis:

verkehrssicher	leichte Mängel	schwere Mängel
65%	30%	5%

Stelle diese Verteilung in einem Streifen- und in einem Kreisdiagramm dar.

(Kurs Mathematik, Klasse 7)

Merkmale

- auch Sachproblem genannt
- Es geht vor allem um Einblick in den Sachzusammenhang.
- mitunter keine ausformulierte Aufgabe sondern nur ein Rahmenthema,

Fermiaufgaben

Beispiel



Wie groß ist das Volumen der beiden Behälter?

Didaktische Aspekte des Sachrechnens

Sachrechnen?

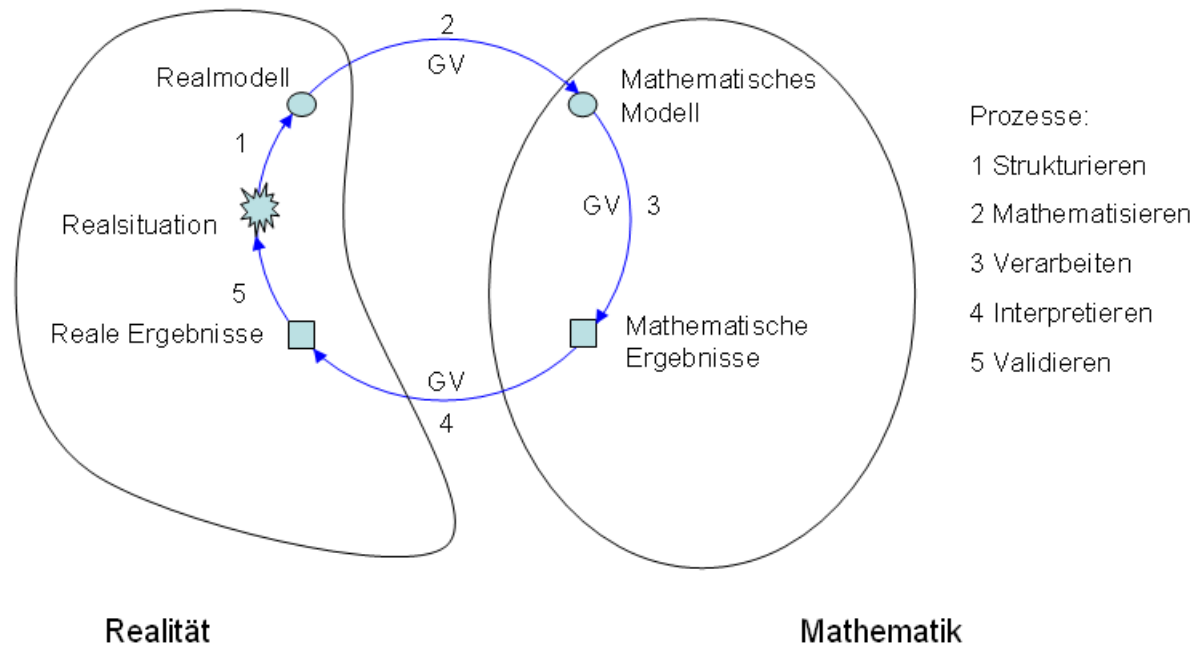
Fermiaufgaben

Merkmale

Bei den Fermi-Aufgaben ...

- geht es weniger um das Rechnen ,
sondern um die Schritte vor und nach dem Rechnen:
 - das Schätzen, Messen, Recherchieren
 - das Mathematisieren, das Übersetzen in die Sprache der Mathematik
 - das Finden verschiedener Wege ...
 - und das Interpretieren und Bewerten der Ergebnisse

Modellierungsaufgaben



- eigentlich kein neuer Aufgabentyp
- mehr im Abschnitt Modellieren

Ziele des Sachrechnens

Mathematisieren

Eines der wichtigsten allgemeinen Lernziele (Winter) des Mathematikunterrichts ist sicher das Mathematisieren von Umweltbezügen.

Dem Sachrechnen kommt bei der Realisierung dieses Ziels eine umwelterhellende und umwelterschließende Funktion zu.

Modellieren

Mathematisieren heißt ein mathematisches Modell (zum Beispiel eine Gleichung) für einen bestimmten Sachverhalt finden und übertragen.

Funktionen des Sachrechnens

(nach Heinrich Winter)

- Sachrechnen als Lernstoff
- Sachrechnen als Lernprinzip
- Sachrechnen als Lernziel

Sachrechnen als Lernstoff

- Vermittlung von Kenntnissen zu Größen aus der Umwelt:
Was ist eine Tonne.
- Rechenverfahren: Prozentrechnung, Zinsrechnung
- Umgang mit Daten

Sachrechnen als Lernprinzip

1. Sachsituationen als Einstieg in Lernprozesse
2. Veranschaulichung mathematischer Begriffe durch ihre Verkörperung in Sachsituationen
3. Sachaufgaben als „Trainingslager“ für mathematische Begriffe und Verfahren

Sachrechnen als Lernziel

Umwelterschließung

„Dies ist die umfassendste Funktion des Sachrechnens, in ihr sind die vorgenannten (Sachrechnen als Lernstoff und als Lernprinzip) aufgehoben. Es ist auch die wichtigste und unterrichtspraktisch am schwierigsten zu verwirklichende Funktion.“

(Winter 1985, S. 31)

Zusammenfassung 1

Klassische Aufgabentypen

eingekleidete Aufgabe	Textaufgabe	Sachaufgabe
ein Klassiker (Grundschule?): Ich habe hier eine Aufgabe und mir fallen keine 2 Lösungen ein. Bitte helft mir *liebguck* Die Aufgabe lautet: An einem Wintertag werden in einem Stall 42 Tiere gezählt. Es sind Pferde und Fliegen. Zusammen haben sie 196 Beine. Wie viele Pferde und wie viele Fliegen sind es? Dazu brauche ich 2 verschiedene Lösungen.	Herr Schmidt bekommt 12 € Stundenlohn. Die monatlichen Abzüge betragen 320 €. Der Nettolohn von Herrn Schmidt beträgt im Mai 1600 €. Wie viele Stunden hat er im Mai gearbeitet?	auch Sachproblem genannt: Shimano wirbt für die neue Deore XTR: 9 Ritzel hinten, 3 Kettenblätter vorn, also 27 Gänge.

<http://www.mathehotline.de/mathe4u/hausaufgaben/messages/23/382923.html> (Zahlenwerte geändert)

	eingekleidete Aufgabe	Textaufgabe	Sachaufgabe
Schwerpunkt	rechnerisch	mathematisch	sachbezogen

Greefrath, „Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe“, S. 86, Spektrum, 2010

Didaktische Aspekte des Sachrechnens

Sachrechnen?

Zusammenfassung 1

	eingekleidete Aufgabe	Textaufgabe	Sachaufgabe
Schwerpunkt	rechnerisch	mathematisch	sachbezogen
Ziel	Anwendung und Übung von Rechenfertigkeiten	Förderung mathematischer Fähigkeiten	Umwelterschließung mit Hilfe von Mathematik

Greefrath, „Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe“, S. 86, Spektrum, 2010

	eingekleidete Aufgabe	Textaufgabe	Sachaufgabe
Schwerpunkt	rechnerisch	mathematisch	sachbezogen
Ziel	Anwendung und Übung von Rechenfertigkeiten	Förderung mathematischer Fähigkeiten	Umwelterschließung mit Hilfe von Mathematik
Darstellung	in einfache Sachsituationen eingekleidet	in (komplexere) Sachsituationen eingekleidet.	reale Daten und Fakten bzw. offene Aufgaben

Greefrath, „Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe“, S. 86, Spektrum, 2010

	eingekleidete Aufgabe	Textaufgabe	Sachaufgabe
Schwerpunkt	rechnerisch	mathematisch	sachbezogen
Ziel	Anwendung und Übung von Rechenfertigkeiten	Förderung mathematischer Fähigkeiten	Umwelterschließung mit Hilfe von Mathematik
Darstellung	in einfache Sachsituationen eingekleidet	in (komplexere) Sachsituationen eingekleidet.	reale Daten und Fakten bzw. offene Aufgaben
Kontext	kein wirklicher Realitätsbezug	kein wirklicher Realitätsbezug	echter Realitätsbezug

Greefrath, „Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe“, S. 86, Spektrum, 2010

	eingekleidete Aufgabe	Textaufgabe	Sachaufgabe
Schwerpunkt	rechnerisch	mathematisch	sachbezogen
Ziel	Anwendung und Übung von Rechenfertigkeiten	Förderung mathematischer Fähigkeiten	Umwelterschließung mit Hilfe von Mathematik
Darstellung	in einfache Sachsituationen eingekleidet	in (komplexere) Sachsituationen eingekleidet.	reale Daten und Fakten bzw. offene Aufgaben
Kontext	kein wirklicher Realitätsbezug	kein wirklicher Realitätsbezug	echter Realitätsbezug
Tätigkeiten	Rechnen	Übersetzen, Rechnen, Interpretieren	Recherchieren, Vereinfachen, Mathematisieren, Rechnen, Interpretieren, Validieren

Greefrath, „Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe“, S. 86, Spektrum, 2010

Sachrechnen

Sachrechnen ist der Teil der Angewandten Mathematik, der Schülern bis zur 10. Klasse zugänglich ist.

(Fricke, 1987, S. 10)

Sachrechnen befasst sich mit Aufgaben, die von außermathematischen Sachverhalten handeln und über die mit mathematischen Mitteln Aussagen gemacht werden.

(Fricke, 1987, S. 6)

Sachrechnen besteht aus dem Entdecken mathematischer Zusammenhänge in der Lebenswirklichkeit und dem Anwenden dieser Zusammenhänge auf die Lebenswirklichkeit.

(Lewe, 2001)

Sachrechnen ist „der Oberbegriff für die Auseinandersetzung mit Aufgaben, die einen Bezug zur Wirklichkeit aufweisen“

(Spiegel, 2006)

Bearbeiten von Textaufgaben

Wie schwierig ist eine Textaufgabe?

Ein Beispiel

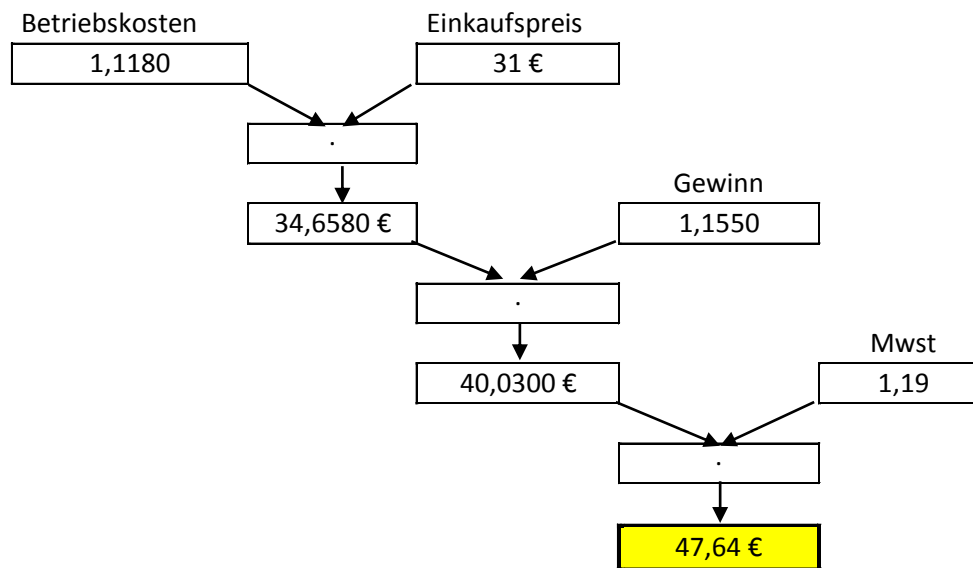
Aufgabe:

Taifur Öztürk betreibt in den Mannheimer Quadraten einen kleinen aber feinen Budoshop. Bei einem Vertreter der Firma Pumidas kauft er günstig Karate-Gi's vom Typ "Bruce Lee" ein. Zu welchem Preis muss Taifur den Karate-Gi verkaufen, wenn er auf den Einkaufspreis 11,8% Betriebskosten berechnet, einen Gewinn von 15,5% erreichen will und seine Schuld beim Pumidas-Vertreter mit € 31,- pro Karate-Gi begleicht.



Schwierigkeiten beim Lösen von Textaufgaben

Komplexität der Aufgabe



Komplexität der Aufgabe

Simplex	linearer Komplex	verzweigter Komplex
<pre> graph TD A[34,6580 €] --> C[.] B[1,1550] --> C C --> D[40,0300 €] </pre>	<pre> graph TD A[1,1180] --> C[.] B[31 €] --> C C --> D[34,6580 €] D --> E[.] F[Gewinn 1,1550] --> E E --> G[40,0300 €] G --> H[.] I[Mwst 1,19] --> H H --> J[47,64 €] </pre>	

Was ist schwieriger?

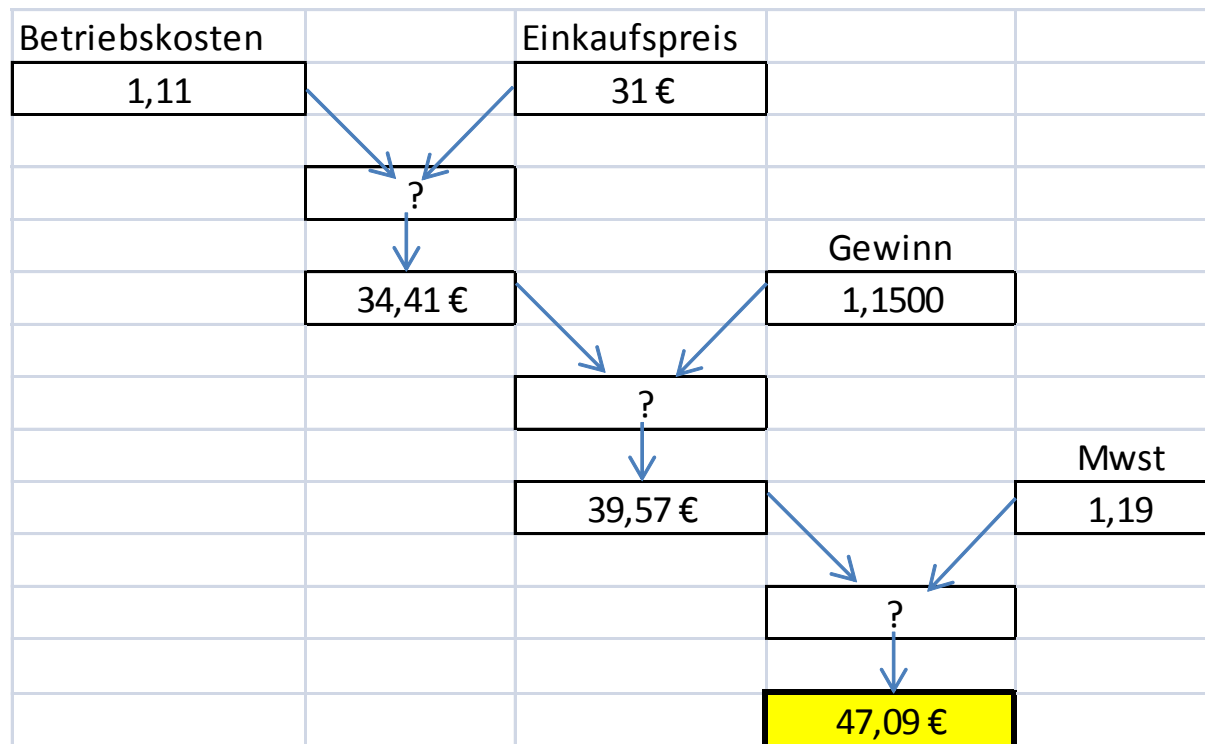
Frau Schmidt kauft 6 Flaschen Weißwein zu je 6,50 € und 4 Flaschen Rotwein zu je 3,50 €. Was muss sie bezahlen?

Herr Schmidt kauft 6 Flaschen Weißwein zu je 6,50 € und 5 Flaschen Rotwein. Er musste 59,00 € bezahlen. Was kostete ein Flasche Rotwein?

(Fricke, S. 34)

Rechnerische Schwierigkeiten

Einfacher:



Angabe des Bearbeitungsziels

Schwieriger?

Taifur Öztürk betreibt in den Mannheimer Quadraten einen kleinen aber feinen Budoshop. Bei einem Vertreter der Firma Pumidas kauft er günstig Karate-Gi's vom Typ "Bruce Lee" ein. Taifur berechnet auf den Einkaufspreis 11% Betriebskosten und möchte einen Gewinn von 15% auf den resultierenden Betrag machen. Der Karate-Gi hat ihn 31,00 € pro Stück gekostet.

Besser?

Angabe des Bearbeitungsziels	
Pro	Kontra

Didaktische Aspekte des Sachrechnens

Bearbeiten von Textaufgaben

Schwierigkeiten beim Lösen von Textaufgaben

Sprachliche Gestaltung

Didaktische Aspekte des Sachrechnens

Bearbeiten von Textaufgaben

Schwierigkeiten beim Lösen von Textaufgaben

Sachsituation

Didaktische Aspekte des Sachrechnens

Bearbeiten von Textaufgaben

Schwierigkeiten beim Lösen von Textaufgaben

Datenfolge