

Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 9 (Lösungen)

1. In der Vorlesung haben wir die Repräsentantenunabhängigkeit des Referenzpunktes zweier Halbebenen gezeigt. Verdeutlichen Sie den Zusammenhang zur Klasseneinteilung der Ebene.

Lösung:

Gegeben sei eine Ebene E und eine in dieser Ebene liegende Gerade g . Betrachtet man die Menge aller Punkte der Ebene $E \setminus g$, so lässt sich die Ebene bezüglich der Geraden g in genau zwei Halbebenen unterteilen. Definiert man eine Relation S mit

$S := \{\forall P, Q | \overline{PQ} \cap g = \{\}\}$ so kann man zeigen, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist und eine Klasseneinteilung mit genau zwei Klassen (Halbebenen) nach sich zieht. Jeder Punkt ein und derselben Halbebene ist ein Repräsentant dieser Klasse.

2. Beweisen Sie: Das Innere eines beliebigen Dreiecks ist konvex.

Lösung:

Das Innere eines Dreiecks ist der Schnitt dreier Halbebenen. Wir wissen nach einem bekannten Satz, dass eine Halbebene eine konvexe Punktmenge ist. Wir wissen nach einem zweiten bekannten Satz, dass die Schnittmenge zweier konvexer Punktfolgen ebenfalls konvex ist. Also ist auch die Schnittmenge zweier Halbebenen eine konvexe Punktmenge. Diese neue konvexe Punktmenge geschnitten mit der dritten Halbebene ist folglich wieder eine konvexe Punktmenge.

3. Definieren Sie den Begriff des Innenwinkel eines Dreiecks.

Definition (Innenwinkel eines Dreiecks):

Gegeben sei ein Dreieck \overline{ABC} . Die Winkel $\angle AB^+AC^+$, $\angle BC^+BA^+$ und $\angle CB^+CA^+$ heißen Innenwinkel des Dreiecks \overline{ABC} .

4. Definieren Sie die Begriffe Stufenwinkel und Wechselwinkel (an geschnittenen Geraden).

Definition (Stufenwinkel): Zwei Winkel $\angle(p, q)$ und $\angle(r, s)$ heißen Stufenwinkel, falls ein Schenkel r des einen Winkels Teilmenge eines Schenkels p des anderen Winkels ist und die anderen beiden Schenkel q und s in einer Halbebene bezüglich der Geraden g liegen, die durch die beiden Schenkel p und r gegeben ist.

Definition (Wechselwinkel): Zwei Winkel $\angle(p, q)$ und $\angle(r, s)$ heißen Wechselwinkel, falls der Scheitelwinkel des Winkels $\angle(p, q)$ und der Winkel $\angle(r, s)$ Stufenwinkel sind.