

Übung Aufgaben 5 S (SoSe 12)

Aufgaben zum Abstand

Aufgabe 5.1

Satz:

Von drei paarweise verschiedenen Punkten A, B und C ein und derselben Geraden g liegt genau einer zwischen den beiden anderen.
Beweisen Sie diesen Satz.

Beweis in zwei Teilen: Existenz (es liegt ein Punkt zwischen zwei anderen) und Eindeutigkeit (es liegt genau ein Punkt zwischen zwei anderen)

Voraussetzung: $A \neq B \neq C \neq A$; $g: A \in g, B \in g$ und $C \in g$

Behauptung: Es liegt genau ein Punkt zwischen zwei anderen.

Beweis der Existenz:

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	Es gilt: $ AB + BC = AC $ oder $ BA + AC = BC $ oder $ BC + CA = BA $	VSS (koll(A, B, C), Axiom II.3)
2)	Es gilt nun: $Zw(A,B,C)$ oder $Zw(B,A,C)$ oder $Zw(B,C,A)$	(1), Definition Zwischenrelation

Beweis der Eindeutigkeit: Beweisführung durch Widerspruch.

Annahme: Es gilt o. B. d. A.: $Zw(A, B, C)$ und $Zw(B, A, C)$

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	Es gilt: $Zw(A, B, C)$ und $Zw(B, A, C)$	Annahme
2)	Es gilt: $ AB + BC = AC $ und $ BA + AC = BC $	(1), Definition Zwischenrelation
3)	$ AB + BA + AC = AC $	(2), Rechnen in $\mathbb{R}$
4)	$ AB + BA = 0$	(3), Rechnen in $\mathbb{R}$
5)	Für den Abstand d zweier Punkte gilt, $d \geq 0$. $ AB $ und demnach auch $ BA $ müssen jeweils den Wert 0 haben.	(4), Axiom II.1
6)	Wenn $ AB = BA = 0$ gilt: $A = B$. Widerspruch zur Voraussetzung, dass $A \neq B$	(5), Axiom II.1, VSS

Aufgabe 5.2

Zeigen Sie, dass für drei paarweise verschiedene Punkte A, B und C gilt:

$$\text{Zw}(A, B, C) \Rightarrow \overline{AB} \subset \overline{AC}$$

Voraussetzung: $A \neq B \neq C \neq A$, $\text{Zw}(A, B, C)$

Behauptung: $\overline{AB} \subset \overline{AC}$

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	$A \neq B \neq C \neq A$, $\text{Zw}(A, B, C)$	VSS
2)	$ AB + BC = AC $	(1), Definition Zwischenrelation
3)	$ BC > 0$	(1) ($B \neq C$), Axiom II.1
4)	$ AB = AC - BC $	(2), Rechnen in $ R $
5)	$ AB < AC $	(3), (4), Rechnen in $ R $
6)	$ AB \subset AC $	Teilbeweis I und II

Teilbeweis I:

Es gilt zu zeigen, dass gilt: $\forall X: X \in \overline{AB} \Rightarrow X \in \overline{AC}$ (Definition Teilmenge)

Fall 1: $X = A$: trivial, $A \equiv A$, deshalb Element von $\overline{AC}$ (Begründung: Definition Strecke $\overline{AC}$)

Fall 2: $X = B$: Laut VSS_{Beweis I} gilt $\text{Zw}(A, B, C)$. Nach Definition Strecke ($\overline{AC} = \{P \mid \text{Zw}(A, P, C)\} \cup \{A, C\}$) und der VSS_{Beweis I} ist B ein Element der Strecke $\overline{AC}$.

Fall 3: Für alle $X \in \overline{AB}$ für die gilt: $\text{Zw}(A, X, B)$

Beweismöglichkeit 1:

Voraussetzung: $\text{Zw}(A, X, B)$, koll(A, X, B), $\text{Zw}(A, B, C)$, koll(A, B, C)

Behauptung: $\forall X: \text{Zw}(A, X, C)$

Nummer	Beweisschritt	Begründung
I)	Durch die Punkte AB verläuft genau eine Gerade	Axiom I.1
II)	$X \in AB$ und $C \in AB$	(I), VSS, Definition kollinear
III)	Es gilt: koll(A, X, C)	(II)
IV)	Wegen $\text{Zw}(A, B, C)$ liegen alle Punkte auf dem Strahl AB^+ - $\text{Zw}(X, A, C)$ ist auszuschließen	VSS, Definition Strahl, (III), A ist Anfangspunkt
V)	Es gilt $\text{Zw}(A, X, C)$	(III), (IV), Teilbeweis II

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird Teilbeweis II als Widerspruchsbeweis erneut ausgelagert:

Annahme: Es gilt $\text{Zw}(A, C, X)$

Nummer	Beweisschritt	Begründung
a)	Es gilt: $ AC + CX = AX $ und $ AX + XB = AB $	Annahme, VSS
b)	$ AC + CX + XB = AB $	(a), Rechnen in $ R $
c)	Für den Abstand d zweier Punkte gilt: $d \geq 0$. Widerspruch zu Beweisteil I: $ AB < AC $	(b), (5), Axiom II.1, Rechnen in $ R $
d)	Annahme ist zu verwerfen, es gilt: $\text{Zw}(A, X, C)$	(c), Teilbeweis I

Beweismöglichkeit 2:**Aufgabe 5.2**

Zeigen Sie, dass für drei paarweise verschiedene Punkte A, B und C gilt:

$$\text{Zw}(A, B, C) \Rightarrow \overline{AB} \subset \overline{AC}$$

Voraussetzung: $A \neq B \neq C \neq A$, $\text{Zw}(A, B, C)$

Behauptung: $\overline{AB} \subset \overline{AC}$

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	$A \neq B \neq C \neq A$, $\text{Zw}(A, B, C)$	VSS
2)	$ AB + BC = AC $	(1), Definition Zwischenrelation
3)	$ BC > 0$	(1) ($B \neq C$), Axiom II.1
4)	$ AB = AC - BC $	(2), Rechnen in $\mathbb{R}$
5)	$ AB < AC $	(3), (4), Rechnen in $\mathbb{R}$
6)	$ AB \subset AC $	Teilbeweis I

Teilbeweis I:

Es gilt zu zeigen, dass gilt: $\forall X: X \in \overline{AB} \Rightarrow X \in \overline{AC}$ (Definition Teilmenge)

Fall 1: $X = A$: trivial, $A \in A$, deshalb Element von $\overline{AC}$ (Begründung: Definition Strecke $\overline{AC}$)

Fall 2: $X = B$: Laut VSS_{Beweis I} gilt $\text{Zw}(A, B, C)$. Nach Definition Strecke ($\overline{AC} = \{P \mid \text{Zw}(A, P, C)\} \cup \{A, C\}$) und der VSS_{Beweis I} ist B ein Element der Strecke $\overline{AC}$.

Fall 3: Für alle $X \in \overline{AB}$ für die gilt: $\text{Zw}(A, X, B)$

Beweis durch Widerspruch:

Annahme: $\exists X \in \overline{AB} \wedge X \notin \overline{AC}$

Nummer	Beweisschritt	Begründung
I)	Es gilt: $ AX + XB = AB $ und $ AX + XC > AC $	Annahme, Dreiecksungleichung, Definition Strecke
II)	$\text{koll}(A, B, C)$	VSS
III)	$X \notin \overline{AB}$	(I), (II)
IV)	$X \notin \overline{AB}$	(III)
V)	Widerspruch zur Voraussetzung ($X \in \overline{AB}$)	(IV)

Aufgabe 5.3

Zeigen Sie, dass für drei paarweise verschiedene Punkte A, B und C gilt:

Wenn $C \in AB^+$ und $|AB| < |AC|$ dann gilt $Zw(A, B, C)$

Voraussetzung: $A \neq B \neq C \neq A$, $C \in AB^+$, $|AB| < |AC|$

Behauptung: $Zw(A, B, C)$

(Sicherlich ist eine Skizze sinnvoll)

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	Es gilt: $Zw(A, B, C)$ oder $Zw(A, C, B)$	VSS ($C \in AB^+$ und $A \neq B \neq C \neq A$), Definition Halbgerade
2)	Es gilt: $ AB + BC = AC $ oder $ AC + CB = AB $	Definition Zwischenrelation, (1)
3)	Es gilt: $Zw(A, B, C)$	Teilbeweis I

Ich beweise Schritt drei ausgelagert durch Widerspruch:¹

Annahme: Es gilt $Zw(A, C, B)$

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	$Zw(A, C, B) = AC + CB = AB $	Annahme, Definition Zwischenrelation
2)	$ AC = AB - CB $	(1), Rechnen in $ R$
3)	$ CB > 0$	$C \neq B$, Axiom II.1
4)	$ AB > AC $	(2), (3), Rechnen in $ R$
5)	Widerspruch zur VSS $ AB < AC $	(5)
6)	Annahme ist zu verwerfen, es gilt $Zw(A, B, C)$	(6), Beweis I

¹ Müsste man eigentlich nicht so aufwendig machen – es reicht einfach zwischen Schritt 2 und 3 noch einmal mit ‚Rechnen in $|R'$ ‘ zu begründen, dass wenn $|AB| < |AC|$ ist, dass nur $Zw(A, B, C)$ gelten kann.

Aufgabe 5.4

Beweisen Sie: Zu jeder Strecke $\overline{AB}$ existiert genau eine Strecke $\overline{AC}$ auf AB^+ mit $|\overline{AB}| = \frac{1}{4}|\overline{AC}|$ und $\overline{AB} \subset \overline{AC}$

Voraussetzung: $\overline{AB}$

Behauptung: Es existiert genau eine Strecke $\overline{AC}$ auf AB^+ mit $|\overline{AB}| = \frac{1}{4}|\overline{AC}|$ und $\overline{AB} \subset \overline{AC}$

Anmerkung:

Zu beweisen gilt die Existenz dieses Punktes C und die Eindeutigkeit des Punktes C.

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	$\overline{AB}$	VSS
2)	Da die Strecke $\overline{AB}$ durch zwei Punkte festgelegt ist, existiert die Gerade AB und dadurch auch der Strahl AB^+	Inzidenzaxiom I.1, Definition Strecke, Definition Halbgerade
3)	$\exists! C \in AB^+ : AC = 4 AB $ - C existiert und ist eindeutig!	(2), Axiom vom Lineal
4)	$ AC > AB $	Rechnen in $\mathbb{R}$, ($\frac{1}{4} < 1$)
5)	Es gilt: $Zw(A, B, C)$ und somit: $ AB + BC = AC = 4 AB $	(4), Beweis 5.3
6)	$\overline{AB} \subset \overline{AC}$	(5) Beweis 5.2

Weitere Aufgabe zur Inzidenz**Aufgabe 5.5**

Beweisen Sie: Je vier nicht komplanare Punkte sind paarweise verschieden (Hinweis: Nutzen Sie bei der Beweisführung die Sätze aus Aufgabe 4.3 und Zusatzaufgabe 4.4).

Voraussetzung: $nkomp(A, B, C, D)$

Behauptung: A, B, C, D sind paarweise verschieden

Beweis durch Widerspruch; Annahme: A, B, C, D sind nicht paarweise verschieden

Fall I: $A = B = C = D$: trivial, Punkt liegt immer in der Ebene

Fall II: $A = B = C \neq D$: trivial, für jede Gerade (Axiom I.1) ex. eine Ebene, die diese enthält.

Fall III: $A = B$ und $A \neq C \neq D \neq A$: wenn $koll(A, C, D)$, dann siehe Fall II, wenn $nkoll(A, C, D)$ gilt nach Axiom I. 4, dass $komp(A (=B), C, D)$

Alle Fälle wurden zum Widerspruch mit der Voraussetzung geführt – die Annahme ist somit zu verwerfen.

Für diejenigen, die kein Freund des Ausdrucks ‚trivial‘ sind, können sich im Fall 1 noch zwei Punkte konstruieren (bzw. in Fall II einen) und dann gilt nach Axiom I.4, dass diese jeweils 3 Punkte in einer Ebene liegen und somit komplanar sind.

Beweismöglichkeit 2:**Aufgabe 5.5**

Beweisen Sie: Je vier nicht komplanare Punkte sind paarweise verschieden (Hinweis: Nutzen Sie bei der Beweisführung die Sätze aus Aufgabe 4.3 und Zusatzaufgabe 4.4).

Voraussetzung: $\text{nkomp}(A, B, C, D)$

Behauptung: A, B, C, D sind paarweise verschieden

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	Es gilt: $A \neq B \neq C$ $A \neq B \neq D$ $B \neq C \neq D$ $C \neq D \neq A$ $A \neq C \neq D$	Nach Voraussetzung sowie Satz 4.3 und 4.4 (Der insgesamt sagt: $\text{nkomp}(A, B, C, D) \Rightarrow$ jeweils drei Punkte sind paarweise verschieden)
2)	Es gilt: $A \neq B \neq C \neq D$	(1)