

Einführung in die Geometrie

Kurzzusammenfassung – Mengen, Relationen, Äquivalenzklassen

Diese Zusammenfassung stellt lediglich einen „Fahrplan“ dar und ersetzt weder den Besuch der Vorlesung noch die Verwendung von Literatur. Sehr empfohlen wird für das Kapitel 1 das (auch für andere Veranstaltungen und den späteren Beruf nützliche) Büchlein aus der Reihe „mathematik-abc für das Lehramt“:

LEHMANN, I.; SCHULZ, W.: *Mengen – Relationen – Funktionen*. Wiesbaden: Teubner, 1997 (3. Aufl. 2007).

1. Mengen, Relationen

Einige Schreibweisen:

$a \in M$	a ist Element von M (gehört der Menge M an).
$a \notin M$	a ist nicht Element von M (gehört der Menge M nicht an).
$M = \{a, b, c, \dots\}$	M besteht aus den Elementen $a, b, c, \dots$
$M = \{x \mid H(x)\}$	M besteht aus allen x , für welche die Aussageform $H(x)$ zutrifft.
$M = \{x \mid x \in G \wedge H(x)\}$	M besteht aus allen Elementen x der Grundmenge G , für welche die Aussageform $H(x)$ zutrifft.
$\emptyset$ oder $\{\}$	leere Menge
$A \subseteq B$	Die Menge A ist eine Teilmenge der Menge B .
$A \subset B$	Die Menge A ist eine echte Teilmenge der Menge B .
$A \cap B$	Durchschnittsmenge der Mengen A und B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge der Mengen A und B
$A \setminus B$	Differenzmenge (B subtrahiert von A)
$(a; b)$	geordnetes Paar
$A \times B$	kartesisches Produkt der Mengen A und B
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\neg$	nicht (Verneinung)
$\exists$ oder „es ex.“	Existenz (es existiert) (Beispiel $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ – „für alle epsilon größer Null existiert ein delta größer Null“)
$\forall$ oder „f. a.“	für alle
$A \Rightarrow B$	Aus Aussage A folgt Aussage B .
$A \Leftrightarrow B$	Aussage A gilt genau dann, wenn Aussage B gilt, das ist gleichbedeutend mit: $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$.
aRb	a steht in der Relation R zu b
$\sim$	Äquivalenzrelation (Abkürzung: ÄR)
$\bar{a}$	Äquivalenzklasse eines Elements a bezüglich einer ÄR (Abkürzung: ÄK)

Sonstige Abkürzungen:

m.a.W.	mit anderen Worten
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
NAF	Nacheinanderausführung

1.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

Begriff der Menge, Prinzipien der Mengenlehre

Cantorsche Mengendefinition: Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente genannt werden) zu einem Ganzen.

Prinzip der Mengenbildung: Für alle diejenigen Objekte x , auf die eine gegebene Aussageform $H(x)$ zutrifft, gibt es stets eine Menge M , die genau jene x als Elemente besitzt.

Prinzip der Mengengleichheit: Mengen M und N sind genau dann gleich, wenn sie aus denselben Elementen bestehen.

Teilmengenbeziehung (Inklusion)

Definition (Teilmenge): A ist *Teilmenge* von B , in Zeichen: $A \subseteq B$, genau dann, wenn jedes Element von A auch Element von B ist: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

A ist *echte Teilmenge* von B ($A \subset B$) genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

Satz (Eigenschaften der Inklusion): Für beliebige Mengen A , B und C gilt:

- o $A \subseteq A$ (Reflexivität),
- o Falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so $A \subseteq C$ (Transitivität),
- o Falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so $A = B$ (Antisymmetrie) sowie
- o $A \not\subseteq A$ (Irreflexivität),
- o Falls $A \subset B$ und $B \subset C$, so $A \subset C$ (Transitivität).
- o Falls $A \subset B$, so $B \not\subseteq A$ (Asymmetrie)

Boolesche Operationen (Vereinigung, Durchschnitt, Differenzmenge)

Definition: Es seien A , B zwei Mengen.

- Die Menge der Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören, heißt *Durchschnitt (Schnittmenge)* $A \cap B$ von A und B : $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
Ist $A \cap B = \{\}$, so heißen A und B *disjunkt* bzw. *elementfremd*.
- Die Menge der Elemente, die zu A oder zu B (also auch diejenigen Elemente, die zu A und zu B) gehören, heißt *Vereinigung (Vereinigungsmenge)* $A \cup B$ von A und B : $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
- Die Menge der Elemente, die zu A aber nicht zu B gehören, heißt *Differenzmenge* A ohne B und wird mit $A \setminus B$ bezeichnet: $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Potenzmenge und kartesisches Produkt

Definition (kartesisches Produkt): Es seien A und B Mengen. Als *kartesisches Produkt* $A \times B$ der Mengen A und B wird die Menge aller geordneten Paare $(a; b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$ bezeichnet:

$$A \times B := \{(a; b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Bezeichnung: Wird das kartesische Produkt einer Menge A mit sich selbst gebildet, so schreibt man auch $A^2 := A \times A$, wie zum Beispiel bei dem bekannten $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.2 Relationen und Klasseneinteilungen

Relationen

Definition: Eine Teilmenge des kartesischen Produkts $M \times M$ einer Menge M heißt *zweistellige Relation* R in M : $R \subseteq M \times M$.

Bemerkung: Es werden in der Vorlesung zum allergrößten Teil zweistellige Relationen betrachtet. Allerdings gibt es auch mehr- (z. B. drei-)stellige Relationen. So ist die Zwischenrelation $Zw(A,B,C)$ (der Punkt B liegt zwischen dem Punkt A und dem Punkt C) eine *dreistellige Relation* in der Menge der Punkte der Ebene.

Wenn im Folgenden nichts anderes ausgeführt wird, sind mit „Relationen“ immer zweistellige Relationen gemeint.

Definition: Eigenschaften von Relationen. Es sei M eine Menge und R eine Relation in M .

- R heißt *reflexiv*, wenn für alle $a \in M$ gilt: aRa .
- R heißt *irreflexiv*, wenn für alle $a \in M$ gilt: $\neg aRa$.
- R heißt *symmetrisch*, wenn für alle $a, b \in M$ gilt: $aRb \Rightarrow bRa$.
- R heißt *asymmetrisch*, wenn für alle $a, b \in M$ gilt: $aRb \Rightarrow \neg bRa$.
- R heißt *antisymmetrisch (identitiv)*, wenn für alle $a, b \in M$ gilt: $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$.
- R heißt *transitiv*, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Äquivalenzrelationen und -klassen

Definition: Eine Relation $\sim$ in einer Menge A heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiele: – Gleichheit,
– Kongruenz geometrischer Figuren,
– Ähnlichkeit geometrischer Figuren
– Parallelität (Grundmenge: Menge aller Geraden der Ebene / des Raumes),
– Parallelgleichheit (Grundmenge: Menge aller Strecken d. Ebene / d. Raumes),
– Pfeilgleichheit (Grundmenge: Menge aller gerichteten Strecken der Ebene / des Raumes),
– Quotientengleichheit,
– Kongruenz modulo m (2 Zahlen lassen bei Division durch m denselben Rest).

Definition: Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation in einer (nicht leeren) Menge A und $a \in A$. Dann heißt $\bar{a} = \{x \in A / x \sim a\}$ *Äquivalenzklasse* von a bezüglich der ÄR $\sim$.

Jedes Element a von $\bar{a}$ heißt *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $\bar{a}$.

Beispiele: – $\bar{s}$ – Menge aller Strecken, die zu der gegebenen Strecke s kongruent sind,
– $\bar{g}$ – Menge aller zu g parallelen Geraden,
– Vektoren – Pfeilklassen: Klassen paralleler, gleich langer und gleich gerichteter „Pfeile“ (gerichteter Strecken),
– Bruchzahlen bzw. gebrochene Zahlen – Klassen quotientengleicher Brüche (bzw. quotientengleicher Paare natürlicher Zahlen),
– Restklassen modulo m – diese Klassen umfassen jeweils alle diejenigen ganzen Zahlen, die bei Division durch m denselben Rest lassen.
– Halbgeraden (Strahlen)
– Halbebenen

Satz: Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation in einer Menge A ($A \neq \{\}$). Dann gilt:

1. Keine der durch $\sim$ erzeugten Äquivalenzklassen ist leer: $\bar{a} \neq \{\}$ für alle $a \in A$.
2. Je zwei verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt: $\bar{a} \neq \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \{\}$.
3. A ist die Vereinigungsmenge aller Äquivalenzklassen: $A = \bigcup_{a \in A} \bar{a}$.

Satz: (*Hauptsatz über Äquivalenzrelationen*): Jede Äquivalenzrelation $\sim$ in einer nichtleeren Menge M bewirkt eine eindeutig bestimmte Zerlegung* von M in nichtleere, disjunkte Teilmengen (die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$), wobei $a, b \in M$ genau dann derselben Teilmenge angehören, wenn sie zueinander in der Relation $\sim$ stehen.

Umgekehrt existiert zu jeder Zerlegung Z der Menge M eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation $\sim$ derart, dass Elemente ein- und derselben durch Z festgelegten Teilmenge stets zueinander in der Relation $\sim$ stehen und für Elemente a, b verschiedener Teilmengen stets $\neg a \sim b$ gilt.

* Spricht man von einer Zerlegung einer Menge M , so ist damit auch gemeint, dass M in der Vereinigung aller Teilmengen vollständig enthalten ist.