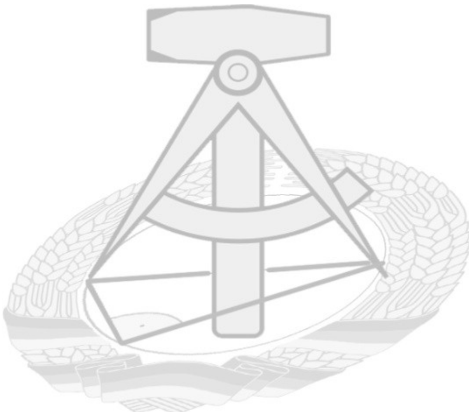
BEWEISEN UND BEGRÜNDEN:
VOM OSTEN LERNEN, HEIßT SIEGEN LERNEN



Michael Gieding, www.ph-heidelberg,de/wp/gieding

GLIEDERUNG

1. Grundlegende Ideen zum Beweisen von Sätzen aus der DDR-Didaktik
2. Allgemeine Ausführungen zur Rolle des Beweisens im derzeitigen MU

GRUNDLEGENDE IDEEN ZUM BEWEISEN VON SÄTZEN

VOM SATZ ZUM BEWEIS

Grundlegende Ideen zum Beweisen von Sätzen

Vom Satz zum Beweis

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Motivieren und Formulieren des Problems

Satzfindung mit reduktiver Phase	Deduktiver Weg der Satzfindung
Satzfindung: Finden des Satzes mit Hilfe reduktiver Erkenntnismethoden	
	Herleitung: Gewinnung des Satzes bei gleichzeitiger Sicherung seiner Wahrheit durch deduktive Erkenntnismethoden
Beweisführung: Finden des Beweises Darstellung des Beweises	

Lösung des Problems durch eine Aussage (Satz, Formel) deren Gültigkeit gesichert ist.

Grundlegende Ideen zum Beweisen von Sätzen

Vom Satz zum Beweis

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Motivieren und Formulieren des Problems

Satzfindung mit reduktiver Phase	Deduktiver Weg der Satzfindung
Satzfindung: Finden des Satzes mit Hilfe reduktiver Erkenntnismethoden	
	Herleitung: Gewinnung des Satzes bei gleichzeitiger Sicherung seiner Wahrheit durch deduktive Erkenntnismethoden
Beweisführung: Finden des Beweises Darstellung des Beweises	

Lösung des Problems durch eine Aussage (Satz, Formel) deren Gültigkeit gesichert ist.

Grundlegende Ideen zum Beweisen von Sätzen

Vom Satz zum Beweis

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Motivieren und Formulieren des Problems

Satzfindung mit reduktiver Phase	Deduktiver Weg der Satzfindung
Satzfindung: Finden des Satzes mit Hilfe reduktiver Erkenntnismethoden	
	Herleitung: Gewinnung des Satzes bei gleichzeitiger Sicherung seiner Wahrheit durch deduktive Erkenntnismethoden
Beweisführung: Finden des Beweises Darstellung des Beweises	

Lösung des Problems durch eine Aussage (Satz, Formel) deren Gültigkeit gesichert ist.

Grundlegende Ideen zum Beweisen von Sätzen

Vom Satz zum Beweis

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Motivieren und Formulieren des Problems

Satzfindung mit reduktiver Phase	Deduktiver Weg der Satzfindung
Satzfindung: Finden des Satzes mit Hilfe reduktiver Erkenntnismethoden	
	Herleitung: Gewinnung des Satzes bei gleichzeitiger Sicherung seiner Wahrheit durch deduktive Erkenntnismethoden
Beweisführung: Finden des Beweises Darstellung des Beweises	

Lösung des Problems durch eine Aussage (Satz, Formel) deren Gültigkeit gesichert ist.

Grundlegende Ideen zum Beweisen von Sätzen

Vom Satz zum Beweis

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Motivieren und Formulieren des Problems

Satzfindung mit reduktiver Phase	Deduktiver Weg der Satzfindung
Satzfindung: Finden des Satzes mit Hilfe reduktiver Erkenntnismethoden	
	Herleitung: Gewinnung des Satzes bei gleichzeitiger Sicherung seiner Wahrheit durch deduktive Erkenntnismethoden
Beweisführung: Finden des Beweises Darstellung des Beweises	

Lösung des Problems durch eine Aussage (Satz, Formel) deren Gültigkeit gesichert ist.

Grundlegende Ideen zum Beweisen von Sätzen

Vom Satz zum Beweis

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Motivieren und Formulieren des Problems

Satzfindung mit reduktiver Phase	Deduktiver Weg der Satzfindung
Satzfindung: Finden des Satzes mit Hilfe reduktiver Erkenntnismethoden	
	Herleitung: Gewinnung des Satzes bei gleichzeitiger Sicherung seiner Wahrheit durch deduktive Erkenntnismethoden
Beweisführung: Finden des Beweises Darstellung des Beweises	

Lösung des Problems durch eine Aussage (Satz, Formel) deren Gültigkeit gesichert ist.

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Motivieren und Formulieren des Problems

Satzfindung mit reduktiver Phase	Deduktiver Weg der Satzfindung
Satzfindung: Finden des Satzes mit Hilfe reduktiver Erkenntnismethoden	
	Herleitung: Gewinnung des Satzes bei gleichzeitiger Sicherung seiner Wahrheit durch deduktive Erkenntnismethoden
Beweisführung: Finden des Beweises Darstellung des Beweises	

Lösung des Problems durch eine Aussage (Satz, Formel) deren Gültigkeit gesichert ist.

Grundlegende Ideen zum Beweisen von Sätzen

Vom Satz zum Beweis

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Motivieren und Formulieren des Problems

Satzfindung mit reduktiver Phase	Deduktiver Weg der Satzfindung
Satzfindung: Finden des Satzes mit Hilfe reduktiver Erkenntnismethoden	
	Herleitung: Gewinnung des Satzes bei gleichzeitiger Sicherung seiner Wahrheit durch deduktive Erkenntnismethoden
Beweisführung: Finden des Beweises Darstellung des Beweises	

Lösung des Problems durch eine Aussage (Satz, Formel) deren Gültigkeit gesichert ist.

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Motivieren und Formulieren des Problems

Satzfindung mit reduktiver Phase	Deduktiver Weg der Satzfindung
Satzfindung: Finden des Satzes mit Hilfe reduktiver Erkenntnismethoden	
	Herleitung: Gewinnung des Satzes bei gleichzeitiger Sicherung seiner Wahrheit durch deduktive Erkenntnismethoden
Beweisführung: Finden des Beweises Darstellung des Beweises	

Lösung des Problems durch eine Aussage (Satz, Formel) deren Gültigkeit gesichert ist.

Grundlegende Ideen zum Beweisen von Sätzen

Vom Satz zum Beweis

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Motivieren und Formulieren des Problems	
Satzfindung mit reduktiver Phase	Deduktiver Weg der Satzfindung
Satzfindung: Finden des Satzes mit Hilfe reduktiver Erkenntnismethoden	
	Herleitung: Gewinnung des Satzes bei gleichzeitiger Sicherung seiner Wahrheit durch deduktive Erkenntnismethoden
Beweisführung: Finden des Beweises Darstellung des Beweises	
Lösung des Problems durch eine Aussage (Satz, Formel) deren Gültigkeit gesichert ist.	

Grundlegende Ideen zum Beweisen von Sätzen

Vom Satz zum Beweis

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Motivieren und Formulieren des Problems

Satzfindung mit reduktiver Phase	Deduktiver Weg der Satzfindung
Satzfindung: Finden des Satzes mit Hilfe reduktiver Erkenntnismethoden	
	Herleitung: Gewinnung des Satzes bei gleichzeitiger Sicherung seiner Wahrheit durch deduktive Erkenntnismethoden
Beweisführung: Finden des Beweises Darstellung des Beweises	

Lösung des Problems durch eine Aussage (Satz, Formel) deren Gültigkeit gesichert ist.

PRINZIP DER ENTSCHEIDUNG ZUGUNSTEN EINER DER SATZFINDUNGSMÖGLICHKEITEN

Prinzip der Entscheidung zugunsten einer der Satzfindungsmöglichkeiten
Vom Satz zum Beweis
Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

Wenn möglich, dann trenne zwischen Satzfindung und Beweis!

Begründung:

Ein Beweis kann erst dann gefunden werden, wenn die Aussage des Satzes hinreichend gut verstanden wurde.

Wenn möglich, dann trenne zwischen Satzfindung und Beweis!

Begründung:

Ein Beweis kann erst dann gefunden werden, wenn die Aussage des Satzes hinreichend gut verstanden wurde.

REDUKTIVE METHODEN DER SATZFINDUNG

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck

1. Induktion
2. Funktionale Betrachtung
3. Verallgemeinerung
4. Umkehrung
5. Analogieüberlegungen
6. Grenzfallbetrachtungen

SATZFINDUNG MITTELS INDUKTION

Beispiel 1: Innenwinkelsumme im Dreieck (das Standardbeispiel)

Beispiel 2: Satz des Thales

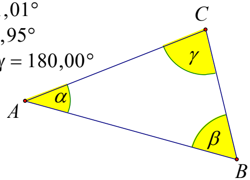
Beispiel 3: Satz des Thales mit DGS

Beispiel 4: Eigenschaften der Diagonalen einer Raute

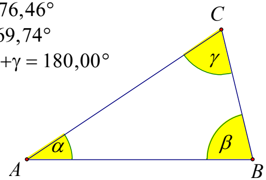
BEISPIEL 1: INNENWINKELSUMME IM DREIECK

Jeder Schüler zeichnet ein beliebiges Dreieck und bestimmt durch Messung die Summe der Innenwinkel.

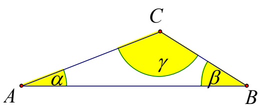
$\alpha = 37{,}04°$
$\beta = 61{,}01°$
$\gamma = 81{,}95°$
$\alpha+\beta+\gamma = 180{,}00°$



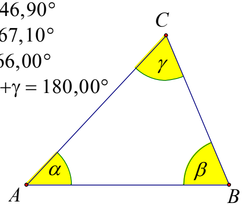
$\alpha = 33{,}80°$
$\beta = 76{,}46°$
$\gamma = 69{,}74°$
$\alpha+\beta+\gamma = 180{,}00°$



$\alpha = 21{,}46°$
$\beta = 32{,}20°$
$\gamma = 126{,}35°$
$\alpha+\beta+\gamma = 180{,}00°$



$\alpha = 46{,}90°$
$\beta = 67{,}10°$
$\gamma = 66{,}00°$
$\alpha+\beta+\gamma = 180{,}00°$



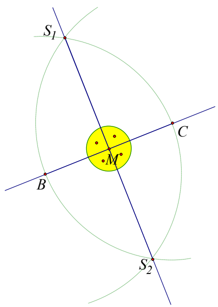
BESPIEL 2: SATZ DES THALES

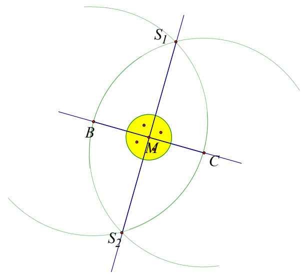
Motivierung:

Wettbewerb:

Konstruiere mit Zirkel und Lineal in einer Minute möglichst viele rechte Winkel.

Schülerlösung:





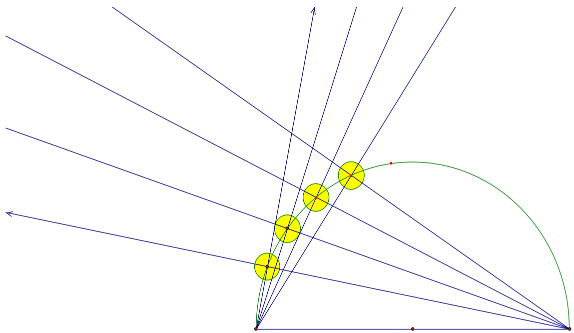
Bespiel 2: Satz des Thales

Motivierung:

Wettbewerb:

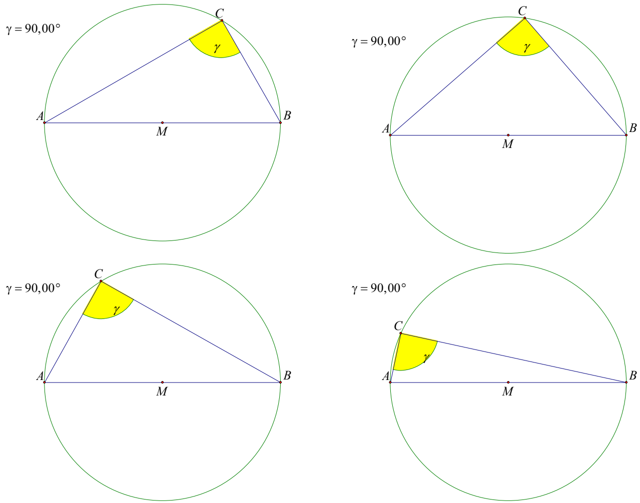
Konstruiere mit Zirkel und Lineal in einer Minute möglichst viele rechte Winkel.

Lehrerlösung:

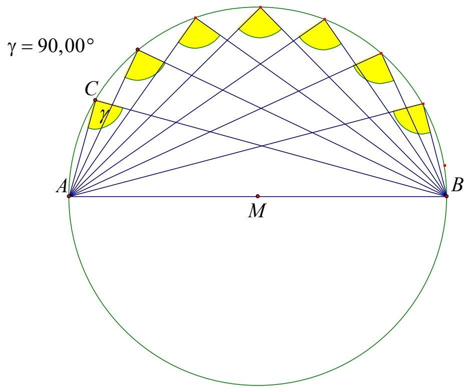


Bespiel 2: Satz des Thales

Empirische Überprüfung der Lehrerlösung durch zeichnen und messen.



BEISPIEL 3: SATZ DES THALES MITTELS DGS



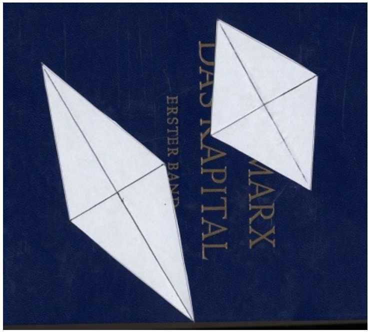
Studentenfrage: Ist das nicht eine funktionale Betrachtung?

grundlegendes Problem: Bedarf es jetzt noch eines Beweises?

BEISPIEL 4: EIGENSCHAFTEN DER DIAGONALEN EINER RAUTE

Idee:

Viele Rauten ausschneiden lassen. Jede Raute durch Faltung mit sich selbst zur Deckung bringen. Was stellst du bezüglich der Faltlinien fest?



BEISPIEL 4: EIGENSCHAFTEN DER DIAGONALEN EINER RAUTE

Idee:

Viele Rauten ausschneiden lassen. Jede Raute durch Faltung mit sich selbst zur Deckung bringen. Was stellst du bezüglich der Faltlinien fest?

Ergebnis:

Die Diagonalen einer Raute stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich.

Ist das nicht eigentlich eine deduktive Satzfindung?

Wir sehen, dass jede Raute achsensymmetrisch bezüglich der Diagonalen ist. Also müssen die Diagonalen sich halbieren und senkrecht aufeinander stehen.

Jetzt ist doch nichts mehr zu beweisen oder?

Beispiel 4: Eigenschaften der Diagonalen einer Raute

Idee:
Viele Rauten ausschneiden lassen. Jede Raute durch Faltung mit sich selbst zur Deckung bringen. Was stellst du bezüglich der Faltlinien fest?

Ergebnis:

Die Diagonalen einer Raute stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich.

Ist das nicht eigentlich eine deduktive Satzfindung?

Wir sehen, dass jede Raute achsensymmetrisch bezüglich der Diagonalen ist.
Also müssen die Diagonalen sich halbieren und senkrecht aufeinander stehen.

Jetzt ist doch nichts mehr zu beweisen oder?

Beispiel 4: Eigenschaften der Diagonalen einer Raute

Idee:
Viele Rauten ausschneiden lassen. Jede Raute durch Faltung mit sich selbst zur Deckung bringen. Was stellst du bezüglich der Faltlinien fest?

Ergebnis:

Die Diagonalen einer Raute stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich.

Ist das nicht eigentlich eine deduktive Satzfindung?

Wir sehen, dass jede Raute achsensymmetrisch bezüglich der Diagonalen ist.
Also müssen die Diagonalen sich halbieren und senkrecht aufeinander stehen.

Jetzt ist doch nichts mehr zu beweisen oder?

Beispiel 4: Eigenschaften der Diagonalen einer Raute

Idee:
Viele Rauten ausschneiden lassen. Jede Raute durch Faltung mit sich selbst zur Deckung bringen. Was stellst du bezüglich der Faltlinien fest?

Ergebnis:

Die Diagonalen einer Raute stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich.

Ist das nicht eigentlich eine deduktive Satzfindung?

Wir sehen, dass jede Raute achsensymmetrisch bezüglich der Diagonalen ist.
Also müssen die Diagonalen sich halbieren und senkrecht aufeinander stehen.

Jetzt ist doch nichts mehr zu beweisen oder?

SATZFINDUNG DURCH FUNKTIONALE BETRACHTUNGEN

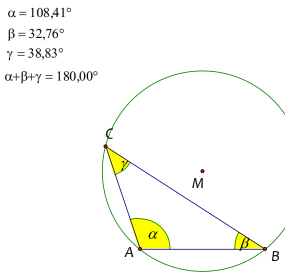
Beispiel 1: Peripheriewinkelsatz

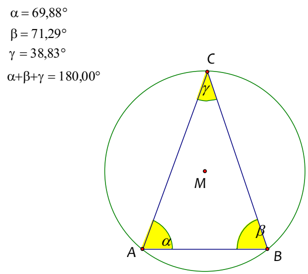
Beispiel 2: Satz des Thales

Beispiel 3: Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck

Beispiel 4: Satz des Pythagoras

BEISPIEL 1: PERIPHERIEWINKELSATZ

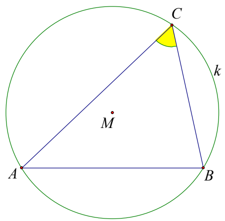




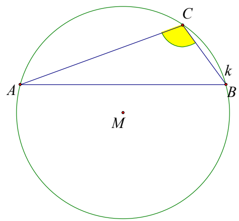
Bei der Bewegung von C auf dem Kreis nach links wird α kleiner und β größer.

Es könnte sein, dass γ dabei konstant bleibt.

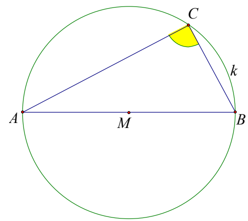
BEISPIEL 2: SATZ DES THALES



Winkel bei C ist spitz

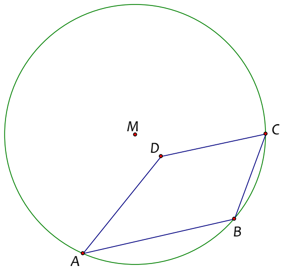


Winkel bei C ist stumpf



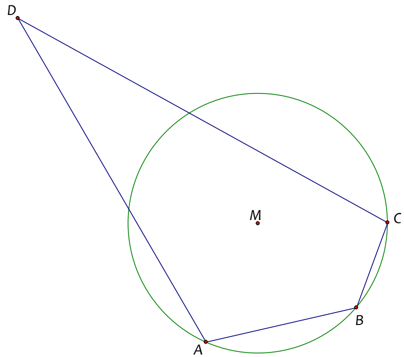
Winkel bei C ist ein Rechter?

BEISPIEL 3: SATZ ÜBER DIE GEGENÜBERLIEGENDEN WINKEL IM SEHNENVIERECK



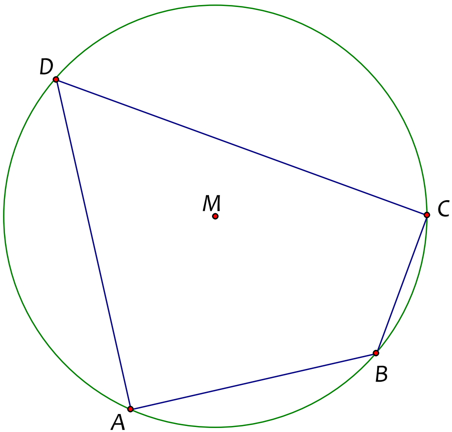
Wir betrachten die Winkel bei B und bei D. Beide sind stumpf. Die Summe ihrer Größen ist offenbar größer als 180°.

Beispiel 3: Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck



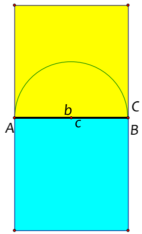
Der Winkel bei B ist fest geblieben. Der Winkel bei D wurde immer keiner.

Beispiel 3: Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck

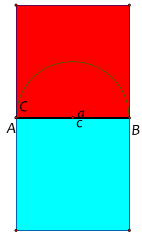


Winkel bei B + Winkel bei D = 180°?

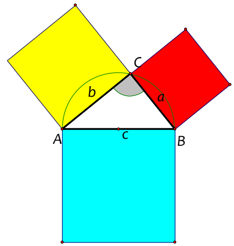
BEISPIEL 4: SATZ DES PYTHAGORAS



$$c^2 = b^2$$



$$c^2 = a^2$$



$$c^2 = a^2 + b^2?$$

Bemerkung:

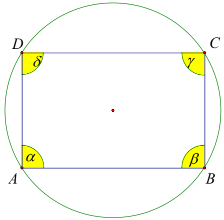
Natürlich spielt ein weiterer Aspekt eine Rolle: Grenzfallbetrachtungen.

SATZFINDUNG DURCH VERALLGEMEINERUNG

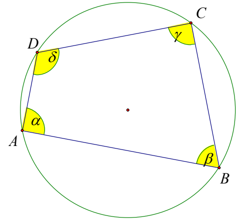
Beispiel 1: Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck

Beispiel 2: Peripheriewinkelsatz

BEISPIEL 1: SATZ ÜBER DIE GEGENÜBERLIEGENDEN WINKEL IM SEHNENVIERECK



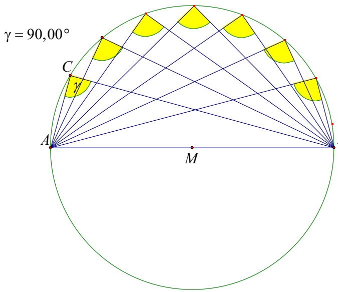
$\overline{ABCD}$ ist ein Rechteck und hat damit einen Umkreis.
Da alle Innenwinkel von $\overline{ABCD}$ Rechte sind, gilt
$\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$.



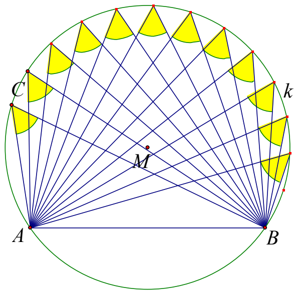
$\overline{ABCD}$ ist kein Rechteck mehr, hat jedoch wie das Rechteck einen Umkreis.
Es könnte sein, dass auch in diesem Fall $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$ gilt.

BEISPIEL 2: PERIPHERIEWINKELSATZ

Voraussetzung: Satz des Thales ist bekannt



Alle gelb markierten Winkel haben die Größe 90°.



Die gelben Winkel sind keine Rechten mehr, aber vielleicht gleich groß?

SATZFINDUNG DURCH UMKEHRUNG BEKANNTER SÄTZE

Die Mehrzahl meiner Studierenden geht davon aus, dass zu jeder Implikation auch deren Umkehrung eine wahre Aussage ist.

Konfusion besteht hinsichtlich der Idee des „Umkehrschlusses“, befördert durch diversen diesbezüglichen Unsinn im Fernsehen:

Fandel zeigte Neuer die rote Karte → Schalke hat verloren.
Umkehrschluss:
Hätte Fandel Neuer nicht rot gezeigt hätte Schalke gewonnen.

Verbiegung der mathematischen Logik insbesondere bei Rechtanwälten verbreitet. (Erfahrungen aus den nach Klausuren heutzutage üblichen Einsprüchen)

SATZFINDUNG DURCH UMKEHRUNG BEKANNTER SÄTZE

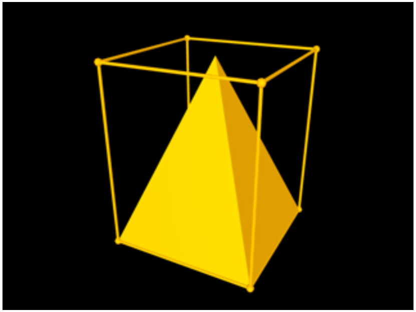
grundlegendes Problem im MU der Schule: Mit einer Implikation wird stillschweigend auch deren Umkehrung als wahr angesehen. (Pythagoras, Thales …)

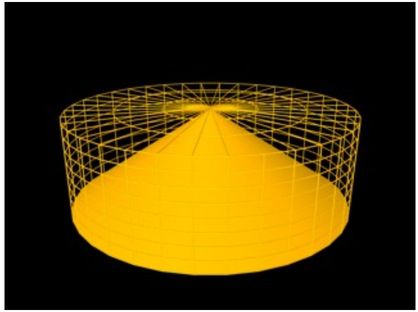
SATZFINDUNG DURCH ANALOGIEÜBERLEGUNGEN

Beispiel 1: Kegelvolumen

Beispiel 2: Volumen von Prismen

BEISPIEL 1: KEGELVOLUMEN

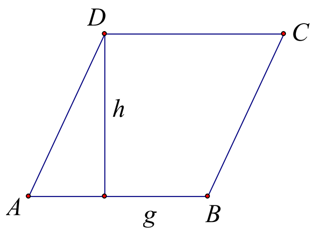
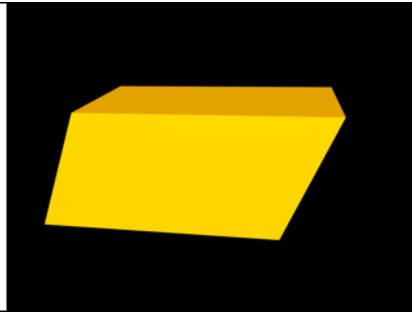




$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} V_{Quader}$$

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} V_{Zylinder}$$

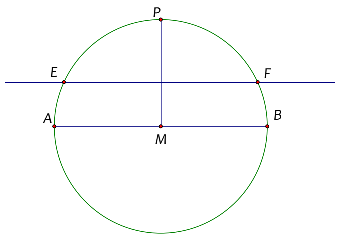
BEISPIEL 2: VOLUMEN VON PRISMEN

	
Flächeninhalt des Parallelogramms: Grundseite mal Höhe	Volumen des Prismas: Grundfläche mal Höhe

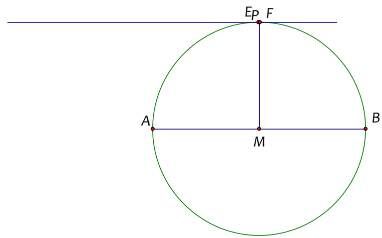
SATZFINDUNG DURCH GRENZFALLBETRACHTUNGEN

Beispiel:

Jede Kreistangente steht senkrecht auf dem Berührungsradius.



Sehne bzw. Sekante



Tangente

DEDUKTIVE SATZFINDUNG

Mitunter ist es nicht möglich, Satzfindung und Beweis strikt zu trennen.

Beispiele: Flächeninhaltsformeln

FÜHREN VON BEWEISEN

1. Arbeit mit dem vermuteten Satz
2. Beweisfindung
3. Beweisdarstellung

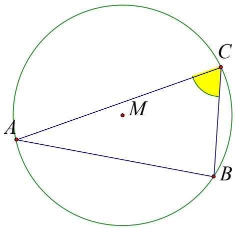
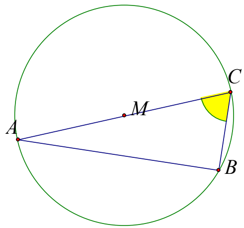
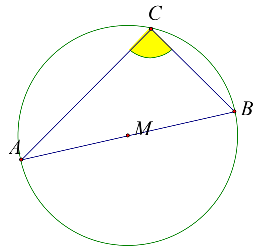
ARBEITEN MIT DEM SATZ

1. Identifizieren der Voraussetzungen
2. Realisieren der Voraussetzungen
3. Arbeit an der Formulierung des Satzes
4. Bezug auf Skizzen
5. Anreichern bzw. „Übersetzen“ von Voraussetzung und Behauptung

IDENTIFIZIEREN DER VORAUSSETZUNGEN

Beispiel: Satz des Thales

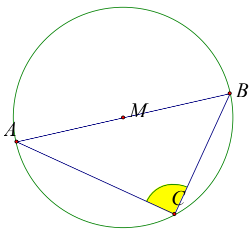
In welchen Fällen darf der Satz des Thales bezüglich des gelb markierten Winkels angewendet werden?

		
Fall a	Fall b	Fall c

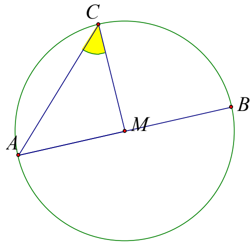
Führen von Beweisen

Arbeiten mit dem Satz

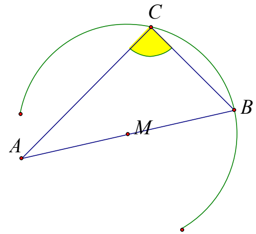
Identifizieren der Voraussetzungen



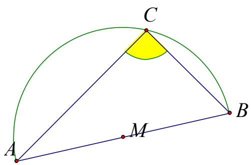
Fall d



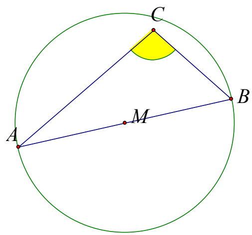
Fall e



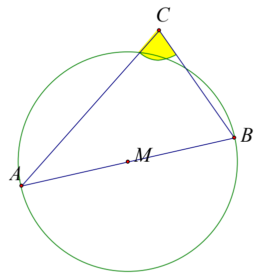
Fall f



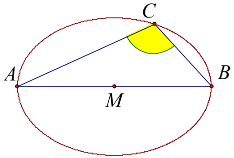
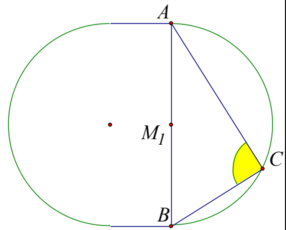
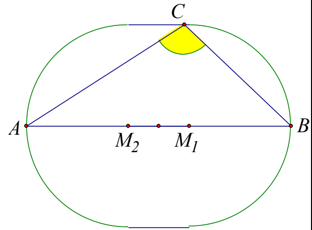
Fall g



Fall h

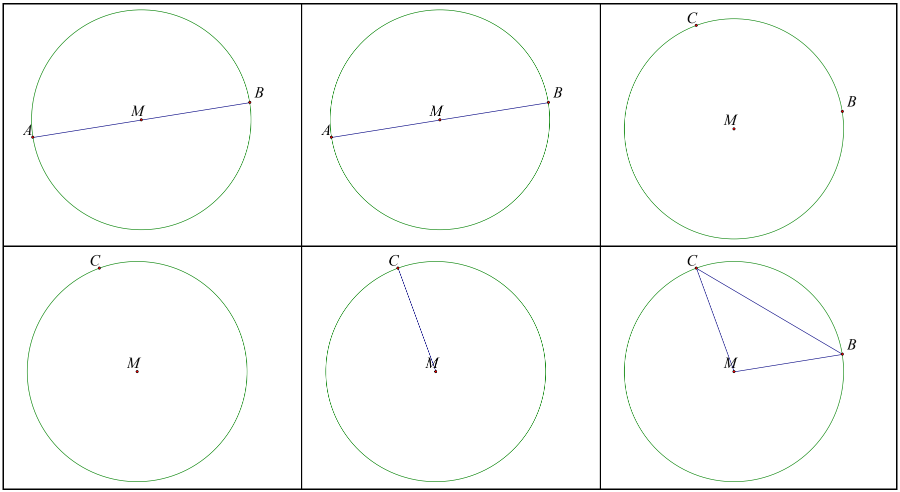


Fall i

		
Fall j	Fall k	Fall l

REALISIEREN

Ergänze zu Thalessatzfiguren:



Fehler, der von Studierenden bezüglich der Erstellung einer Aufgabenstellung obiger Art gern gemacht wird:

Vorgegeben wird ein spezielles Dreieck. Aus einer Auswahl von Kreisen ist derjenige auszuwählen, der bezüglich des Dreiecks der Thaleskreis ist.

ARBEIT AN DER FORMULIERUNG DES SATZES

- Voraussetzung, Behauptung nennen
- Wenn-Dann-Formulierung
- weitere Formulierungen des Satzes

Beispiel 1: Satz des Pythagoras

- In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.
- Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, so ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

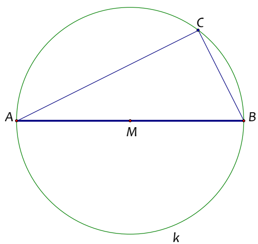
Beispiel 2: Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck

- In jedem Sehnenviereck beträgt die Summe der Größen der gegenüberliegenden Innenwinkel 180°.
- Wenn ein Viereck ein Sehnenviereck ist, dann beträgt die Summe der Größen der gegenüberliegenden Innenwinkel 180°.

BEZUG AUF SKIZZEN

Beispiel: Satz des Thales

Voraussetzungen:

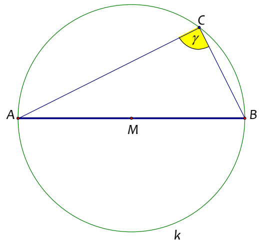


(I) Scheitelpunkt C liegt auf dem Kreis k

(II) $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser von k

Führen von Beweisen
Arbeiten mit dem Satz
Bezug auf Skizzen

Behauptung:



γ ist ein rechter Winkel.

ANREICHERN BZW. „ÜBERSETZEN“ VON VORAUSSETZUNG UND BEHAUPTUNG

Beispiel 1: Satz des Thales

Eigentliche Formulierung: Jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser ist ein Rechter.

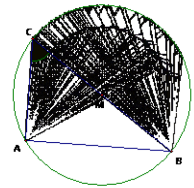
Mit Hilfe der Skizze lässt sich die Voraussetzung „Peripheriewinkel“ als „Scheitelpunkt liegt auf k“ interpretieren (übersetzen).

Weitere Formulierung für die Voraussetzung „Durchmesser“:

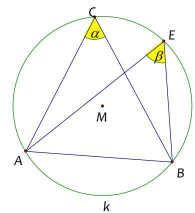
Der Mittelpunkt von k liegt auf $\overline{AB}$.

Beispiel 2: Peripheriewinkelsatz

Alle Peripheriewinkel über derselben Sehne sind zueinander kongruent.



Anders ausgedrückt: zwei beliebige Peripheriewinkel über derselben Sehne sind gleich groß.



Voraussetzung:
E und C liegen auf k.
Die Schenkel von α und β gehen durch A und B

Behauptung:

$\alpha = \beta$

BEWEISFÜHRUNG

1. Beweisfindung
2. Beweisdarstellung

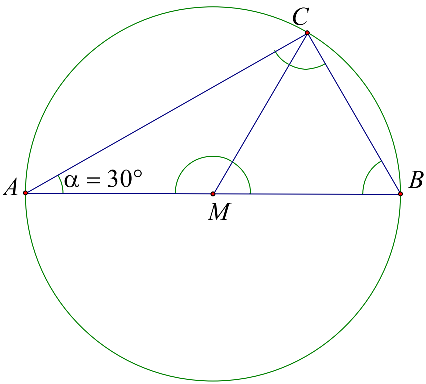
BEWEISFINDUNG

1. „Beweisen“ am Beispiel
2. Ikonische Beweise
3. Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten

„BEWEISEN“ AM BEISPIEL

Beispiel 1: Satz des Thales, Variante 1

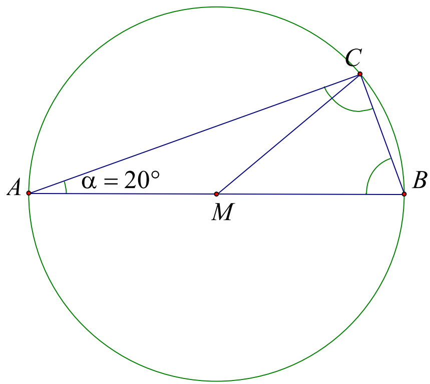
Berechne die fehlenden Winkelgrößen:



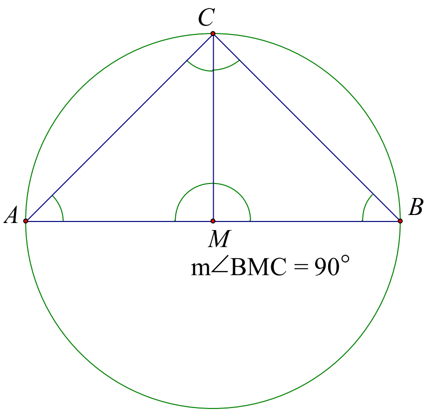
Beispiel 2: Satz des Thales, Variante 2

„Beweisen“ am Beispiel

Berechne die fehlenden Winkelgrößen (ohne die Winkel mit dem Scheitelpunkt M zu berechnen)



Beispiel 3: Satz des Thales, Variante 3



IKONISCHE BEWEISE

Beispiel 1: Satz des Thales

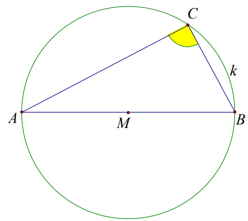
Beispiel 2: Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck

VORWÄRTSARBEITEN, RÜCKWÄRTSARBEITEN

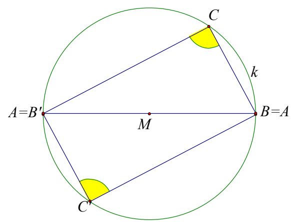
Beispiel: Satz des Thales

Rückwärtsarbeiten

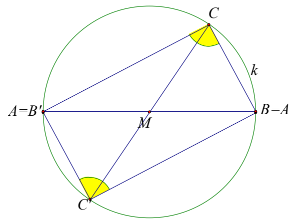
Wir gehen einmal davon aus, dass der gelbe Winkel wirklich ein Rechter ist.



Wenn der gelbe Winkel wirklich ein Rechter ist, dann müsste durch eine Punktspiegelung des Dreiecks $\overline{ABC}$ an M insgesamt ein Rechteck entstehen.



Ein Viereck ist genau dann ein Rechteck, wenn seine Diagonalen kongruent sind und einander halbieren.
Da $\overline{CC'}$ und $\overline{AB}$ Durchmesser von k sind, haben sie die gleiche Länge.
Da $\overline{CC'}$ und $\overline{AB}$ den Mittelpunkt von k als einzigen Punkt gemeinsam haben, halbieren sie einander.



Korrekter Beweis?

Für viele Studierende schon.

BEWEISDARSTELLUNG

1. Problem 1: Die Abstraktheit der Darstellung
2. Problem 2: Die Genauigkeit der Darstellung
3. Ein probates Hilfsmittel: tabellarische Darstellungen

PROBLEM 1: DIE ABSTRAKTHEIT DER DARSTELLUNG

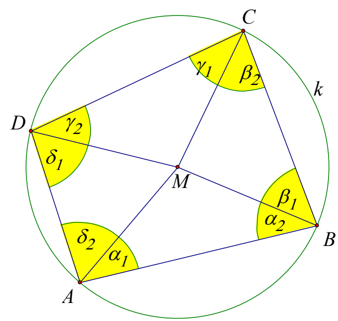
Beispiel: Der Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck

Zu zeigen: $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \delta_2 = 180°$
Wissen: $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2, \delta_1 = \delta_2$
(Basiswinkel)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 = 360°$$

(Innenwinkelsumme im Viereck)

$$2\alpha_1 + 2\beta_2 + 2\gamma_1 + 2\delta_2 = 360°$$
$$2(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \delta_2) = 360°$$
$$\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \delta_2 = 180°$$



PROBLEM: DIE GENAUIGKEIT DER DARSTELLUNG

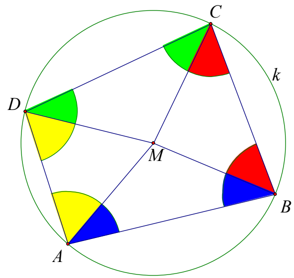
Beispiel: Der Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck

Zu zeigen:  +  +  + =180°

Wissen: 2  +2  +2  + 2 =360°

(Innenwinkelsumme im Viereck)

Also:  +  +  + =180°



Reicht das aus?

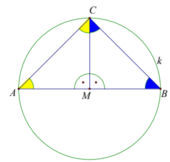
EIN PROBATES HILFSMITTEL: TABELLARISCHE DARSTELLUNGEN

Beispiel: Satz des Thales

Wir gehen davon aus, dass der Peripheriewinkelsatz gilt. Es genügt dann, für einen speziellen Peripheriewinkel über einem Durchmesser zu zeigen, dass er ein Rechter ist.

Zu zeigen:

Ein gelber und ein blauer Winkel bilden zusammen einen rechten Winkel.



Nr.	Beweisschritt	Begründung
1	Die gleichfarbigen Winkel sind kongruent.	Basiswinkel
2	Die gelben Winkel haben eine Größe von 45°.	Innenwinkelsumme, rechter Winkel bei M
3	Die blauen Winkel haben eine Größe von 45°.	Innenwinkelsumme, rechter Winkel bei M
4	Ein blauer und ein gelber Winkel ergeben zusammen 90°.	folgt aus 2 und 3