

## Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 3

(Aufgaben zur Vorbereitung auf das Tutorium in der Woche vom 03.05.-07.05.10)

Aufgaben zu Mengen mit Beispielen aus der Geometrie:

1. Gegeben sind ein Kreis  $k$  mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $M$  sowie eine Gerade  $g$ . Die Gerade  $g$  und der Kreis  $k$  lassen sich als Punktmengen auffassen.

Geben Sie in Abhängigkeit von dem Radius  $r$  des Kreises  $k$  sowie dem Abstand\*  $d(M, g)$  des Mittelpunktes des Kreises  $k$  von der Geraden  $g$  Bedingungen dafür an, dass

- $k \cap g$  die leere Menge ist;
- $k \cap g$  genau ein Element (d. h. einen Punkt) enthält  
(man sagt dazu auch: Die Menge  $k \cap g$  hat die Mächtigkeit 1);
- $k \cap g$  genau zwei Elemente enthält (die Menge  $k \cap g$  also die Mächtigkeit 2 hat).

\*Unter dem Abstand  $d(P, g)$  eines Punktes  $P$  von einer Geraden  $g$  versteht man das Minimum der Abstände aller Punkte  $X \in g$  von  $P$ :  $d(P, g) = \min_{X \in g} |PX|$ .

2. Gegeben sind zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$  mit den Radien  $r_1$  bzw.  $r_2$  und den Mittelpunkten  $M_1$  bzw.  $M_2$ .

- a) Wie viele Elemente (Punkte) kann die Schnittmenge  $k_1 \cap k_2$  der beiden Kreise enthalten?  
b) Geben Sie in Abhängigkeit von den Radien  $r_1$  und  $r_2$  sowie dem Abstand  $|M_1 M_2|$  der beiden Mittelpunkte Bedingungen dafür an, dass

- $k_1 \cap k_2$  die leere Menge ist;
- $k_1 \cap k_2$  genau ein Element enthält (die Menge  $k_1 \cap k_2$  also die Mächtigkeit 1 hat);
- $k_1 \cap k_2$  genau zwei Elemente enthält (die Menge  $k_1 \cap k_2$  also die Mächtigkeit 2 hat);
- $k_1 \cap k_2$  mehr als zwei Elemente enthält (die Mächtigkeit von  $k_1 \cap k_2$  größer als 2 ist).

3.  $T(n)$  sei die Menge aller Teiler der natürlichen Zahl  $n$ . So ist z.B.  $T(4) = \{1, 2, 4\}$ , denn 1, 2 und 4 sind Teiler von 4. Geben Sie das kartesische  $T(10) \times T(6)$  in aufzählender Form an.
4. Kann das kartesische Produkt zweier Mengen  $A$  und  $B$  aus genau 7 geordneten Paaren  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$  bestehen?