

Einführung in die Geometrie: Übungsserie 4

(Aufgaben zur Vorbereitung auf die Übungen in der Woche vom 10.05.-14.05.10)

Aufgabe 1:

Wir gehen von folgender Implikation aus: Wenn zwei Geraden g und h nicht identisch sind, dann haben sie höchstens einen Punkt gemeinsam.

- a) Wie lautet die Kontraposition dieser Implikation?
- b) Wie lautet die Annahme, wenn Sie diese Implikation durch einen Widerspruch beweisen möchten?
 - a) Wenn zwei Geraden g und h mehr als einen Punkt gemeinsam haben, dann sind sie identisch.
 - b) Annahme: Wenn zwei Geraden g und h nicht identisch sind, **dann haben sie mehr als einen Punkt gemeinsam.**

Aufgabe 2:

Wir gehen von folgender Implikation aus: Wenn zwei Winkel Nebenwinkel sind, so sind sie supplementär.

- a) Wie lautet die Kontraposition dieser Implikation?
- b) Wie lautet die Annahme, wenn Sie diese Implikation durch einen Widerspruch beweisen möchten?
 - a) Wenn zwei Winkel nicht supplementär sind, so sind es keine Nebenwinkel.
 - b) Wenn zwei Winkel Nebenwinkel sind, **so sind sie nicht supplementär.**

Aufgabe 3:

Das Parallelenaxiom lautet wie folgt:

Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es *höchstens* eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist.

Nutzen Sie dieses Axiom, beim Lösen der folgenden Aufgabe:

Es seien a , b und c drei paarweise verschiedene Geraden in ein und derselben Ebene.

- a) Beweisen Sie folgende Implikation durch einen Widerspruchsbeweis: $a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$.
- b) Welche Eigenschaft der Relation $\parallel$ auf der Menge aller Geraden einer Ebene haben Sie hiermit gezeigt?

- a) Voraussetzung: $a \parallel b \wedge b \parallel c$

Annahme: a ist nicht parallel zu c

$\Rightarrow$ es existiert ein Schnittpunkt $a \cap c = \{S\}$

also: $a \parallel b$ mit $S \in a$ und $c \parallel b$ mit $S \in c$

$\Rightarrow$ zu b existieren zwei verschiedene Parallelen a und c durch S

$\Rightarrow$ Widerspruch zum Parallelenaxiom

$\Rightarrow$ Annahme ist zu verwerfen

$\Rightarrow a \parallel c$

Aufgabe 4:

Untersuchen Sie folgende Relation S auf ihre Eigenschaften:

$$gSh :\Leftrightarrow g \cap h \neq \{\}$$

Relation ist reflexiv: $g \cap g = \{g\} \Rightarrow gSg$

Relation ist symmetrisch: da $g \cap h = h \cap g \Rightarrow h \cap g \neq \{\}$ (wegen Kommutativität der Schnittmenge)

Relation ist nicht transitiv: Z. B. wenn g senkrecht auf h steht und h senkrecht auf f steht, sind g und f parallel und haben damit keinen Schnittpunkt.

Aufgabe 5:

In der Schule sprechen wir davon, dass wir Dreiecke

- hinsichtlich der Seitenlängen oder
- hinsichtlich der Winkelgrößen klassifizieren.

In welchen der beiden Fälle handelt es sich um eine wirkliche Klasseneinteilung? Argumentieren Sie mit Hilfe eines Venn-Diagramms.

a)

Lösung: Zunächst ein Hinweis, inwiefern sich die Dreiecke hinsichtlich ihrer Seitenlängen bzw. Winkelgrößen klassifizieren lassen.

- Hinsichtlich der Seitenlängen unterscheiden wir ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke.
- Hinsichtlich der Winkelgrößen unterscheiden wir spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke.

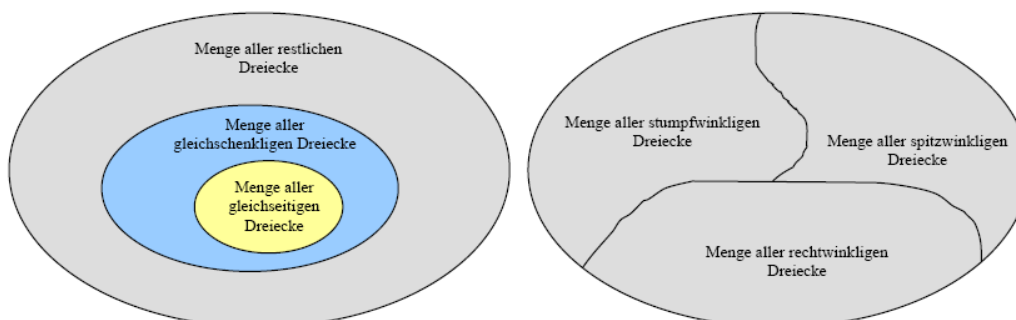
Nur im Falle der Klassifikation hinsichtlich der Winkelgrößen handelt es sich um eine wirkliche Klasseneinteilung.

b)

Lösung: Bevor wir uns dem Venn-Diagramm widmen, zunächst noch einmal ein Blick darauf, was wir unter einer Klasseneinteilung verstehen: In einer Menge M sei ein System K von Teilmengen $K = \{T_1; T_2; T_3, \dots\}$ gegeben. K heißt genau dann Klasseneinteilung, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Keine der Teilmengen ist leer.
- Der Durchschnitt je zweier Mengen aus K ist leer.
- Die Vereinigung aller Mengen aus K ergibt die Menge M .

Im Falle der Klassifikation hinsichtlich der Winkelgrößen sind alle diese Eigenschaften erfüllt, im Falle der Unterscheidung hinsichtlich der Seitenlängen jedoch nicht – wie das folgende Venn-Diagramm verdeutlicht.



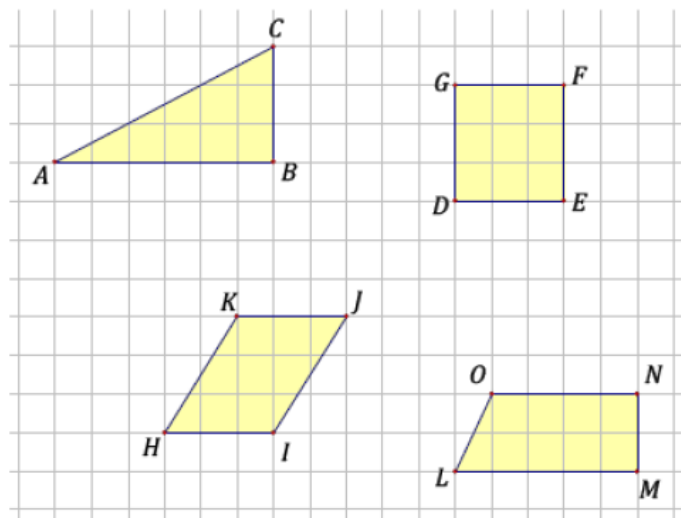
Die „Menge aller gleichseitigen Dreiecke“ ist eine echte Teilmenge der „Menge aller gleichschenkligen Dreiecke“. Folglich ist der Durchschnitt aus der „Menge aller gleichseitigen Dreiecke“ und der „Menge aller gleichschenkligen Dreiecke“ nicht leer, sondern die „Menge aller gleichseitigen Dreiecke“. Damit ist der Punkt ii) aus der Forderung an eine Klasseneinteilung verletzt. Die in der Schule erfolgte Klassifikation hinsichtlich der Seitenlänge ist also keine Klasseneinteilung im mengentheoretischen Sinne.

Aufgabe 6:

Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt P auf g . Durch diesen Punkt P wird die Gerade g in zwei Halbgeraden geteilt.

- Warum ist diese Einteilung von g in die zwei Halbgeraden bezüglich P keine Klasseneinteilung auf der Menge der Punkte von g ?
 - Geben Sie zwei Klasseneinteilungen auf der Menge der Punkte von g an, die den Punkt P und die auf g durch P bestimmten Halbgeraden in modifizierter Form verwenden.
- Wie man der Definition der Halbgeraden entnehmen kann, gehört zu jeder Halbgeraden der Anfangspunkt P . Die Schnittmenge der beiden Halbgeraden ist demzufolge nicht leer, die Eigenschaft ii) der Klasseneinteilung ist nicht erfüllt.
 - Es können je nach Definition zwei oder drei Klassen gebildet werden.
Die Einteilung in zwei Klassen erfolgt derart, dass die offenen Halbgerade eine Klasse, die andere Halbgerade mit Anfangspunkt P die zweite Klasse bilden.
Die Einteilung in drei Klassen erfolgt derart, dass jeweils die offenen Halbgeraden jeweils eine Klasse bilden. Der Punkt P bildet eigene Klasse.

Aufgabe 7: Es sei $\mathcal{F}$ die Menge der Figuren der Ebene. Auf $\mathcal{F}$ sei eine Äquivalenzrelation $\diamond$ definiert. $\diamond$ möge $\mathcal{F}$ derart in Klassen einteilen, dass die folgenden Figuren in ein und derselben Klasse liegen:



Geben Sie eine Interpretation der Relation $\diamond$ an.

Lösung: Bei dieser Aufgabe gab es eine Vielzahl von Lösungsmöglichkeiten z. B:

- Die Figuren stehen in der Relation flächengleich zu sein
- Die Figuren stehen in der Relation n -Ecke mit $n < 5$ zu sein
- Die Figuren stehen in der Relation den gleichen Umlaufsinn zu haben
- Die Figuren stehen in der Relation konvex zu sein
- ...