Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 12

(Lösung)

1. Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen.
   Beweisen Sie Satz IX.3:
   $|\alpha| > |\beta| \Rightarrow |a| > |b|$

Voraussetzung: $|\alpha| > |\beta|$
Behauptung: $|a| > |b|$
Annahme: $|a| \leq |b|$
Aus " $\leq$ " lassen sich zwei Fälle ableiten:

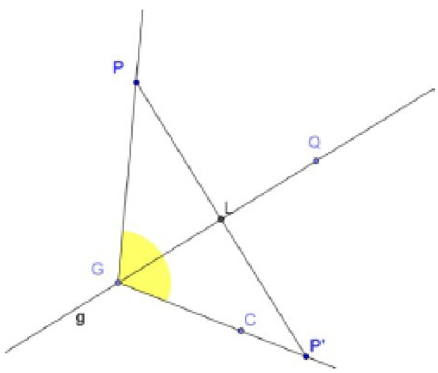
1. $|a| = |b|$, dann gilt allerdings $|\alpha| = |\beta|$, wegen Basiswinkelsatz. Widerspruch zur VSS!
2. $|a| < |b|$, nach Satz IX.2 folgt daraus aber $|\alpha| < |\beta|$ im Widerspruch zur Voraussetzung!

In beiden Fällen ist die Annahme zu verwerfen, die Behauptung stimmt!

2. Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit des Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g: Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt P außerhalb dieser Geraden gibt es *höchstens* ein Lot.

Beweis:

Auf g existiert ein Punkt G.
Fall I: $PG \perp g$, fertig
Fall II: nicht$(PG \perp g)$



(1)	$\exists PC^+ \subset gP^-$: $\lvert\angle LGP\rvert = \lvert\angle LGC\rvert$	Winkelmaßaxiom, Winkel-konstruktionsaxiom
(2)	$\exists P' \in PC^+$: $\lvert GP'\rvert = \lvert GP\rvert$	Abstandsaxiom, Axiom vom Lineal
(3)	$\exists L: \{L\} = g \cap \overline{PP'}$	P und P' gehören zu verschiedenen Halbebenen bzgl. g
(4)	$\overline{GL} \cong \overline{GL}$	trivial
(5)	$\overline{LGP'} \cong \overline{LGP}$	(1), (2), (4), SWS
(6)	$\angle PLG \cong \angle P'LG$	(5)
(7)	$\lvert\angle PLG\rvert = \lvert\angle P'LG\rvert = 90$	kongruente Nebenwinkel, also rechte Winkel
(8)	$PL \perp g$	(7)

3. Beweisen Sie: Ist g eine Gerade, P ein Punkt, der nicht auf g liegt, und Q der Fußpunkt des Lotes von P auf g, so existiert kein von Q verschiedener Punkt auf g, dessen Abstand von P kleiner oder gleich dem Abstand $|PQ|$ ist.

Beweis:

Es sei R ein beliebiger, von Q verschiedener Punkt auf g. Nach Korollar 1 müssen in jedem Dreieck mindestens 2 der Innenwinkel spitze Winkel sein, somit ist der Winkel $\angle(PRQ)$ ein spitzer und deshalb kleiner als der Winkel $\angle(PQR)$, woraus sich nach der Beziehung „größere Seite – größerer Winkel" unmittelbar $|PR| > |PQ|$ ergibt.