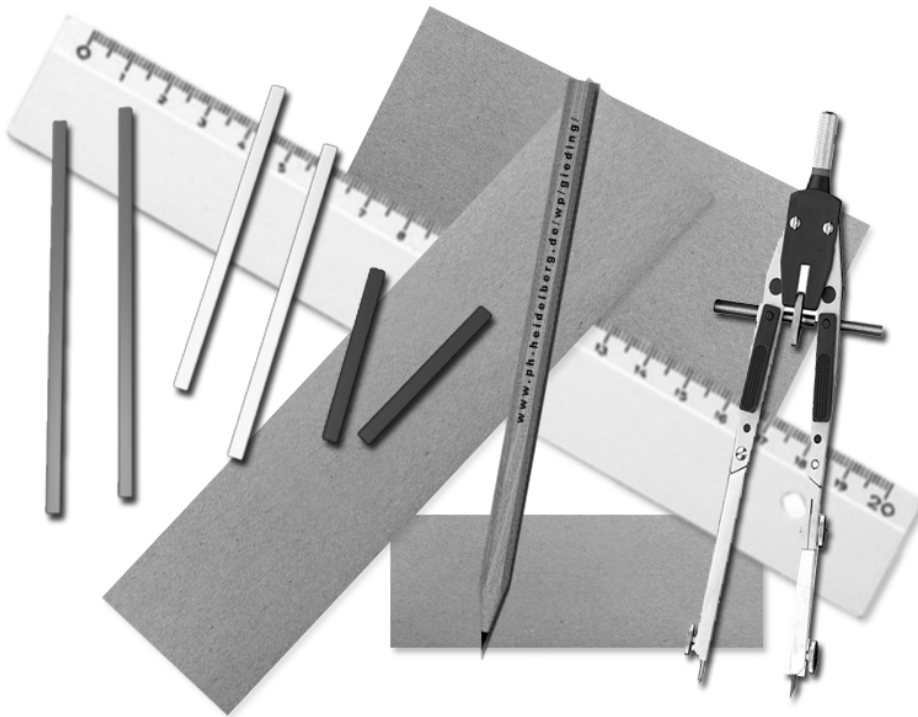


PH Heidelberg, Fach Mathematik

Klausur zur Akademischen Vorprüfung

Mathematische Grundlagen II: Einführung in die Geometrie Sekundarstufe



Wintersemester 12/13

12. Februar 2013

Aufgabe 8: Definieren

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Definieren Sie den Begriff Nebenwinkel.	3	
b)	Es seien SA^+ und SB^+ zwei verschiedene Halbgeraden. Jemand definiert $M := \{P P \in SA, B^+ \wedge P \in SB, A^+\}$. Was wurde mit Menge M definiert?	2	
c)	<i>Scheitelwinkel</i> haben die Eigenschaft kongruent zueinander zu sein. Ist diese Eigenschaft <i>hinreichend</i> , <i>notwendig</i> oder <i>hinreichend und notwendig</i> dafür, dass zwei Winkel <i>Scheitelwinkel</i> sind. Begründen Sie Ihre Antwort. (Skizzen sind zur Begründung zulässig.)	2	
d)	Formulieren Sie eine Konventionaldefinition des Begriffs <i>Tangente an einen Kreis</i> .	3	

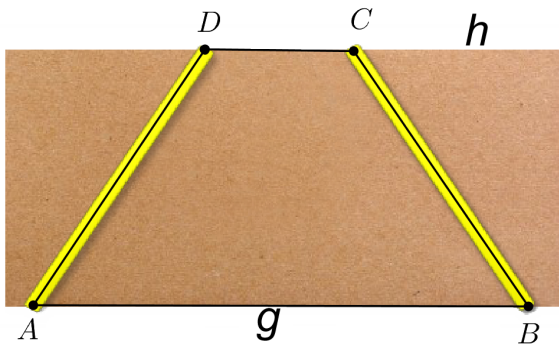
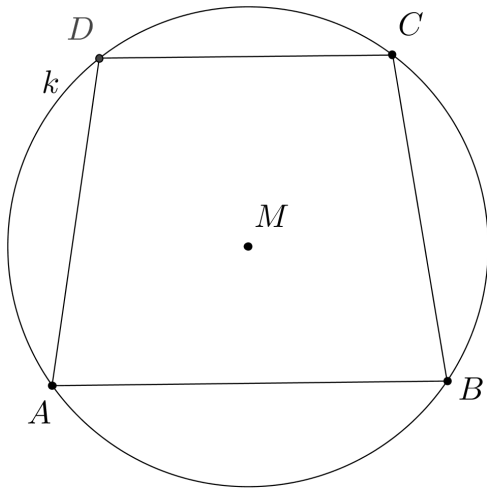


Abb. 01

Konstruktiver Begriffserwerb T_1 :

Legt man auf einen Streifen (Paar paralleler Geraden g und h) Stäbchen gleicher Länge (Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ mit $\overline{AD} \cong \overline{BC}$) derart, dass A und B auf g und D und C auf h wie in Abbildung 1 zum Liegen kommen, dann erhält man ein gleichschenkliges Trapez $\overline{ABCD}$. Es sei dabei ferner vereinbart, dass die beiden Stäbchen nicht parallel sein dürfen, es sei denn, dass das Viereck $\overline{ABCD}$ ein Rechteck ist.

e)	Definieren Sie den Begriff gleichschenkliges Trapez, wie er sich entsprechend T_1 unmittelbar ergibt. <i>Definition:</i>	5	
----	---	---	--

Aufgabe 9: Argumentieren, Begründen, Beweisen

Gegeben sei ein Viereck $\overline{ABCD}$ mit folgenden Eigenschaften:

V_1 : $\overline{ABCD}$ hat einen Umkreis k mit Mittelpunkt M .

V_2 : Ferner gelte $AB \parallel CD$.

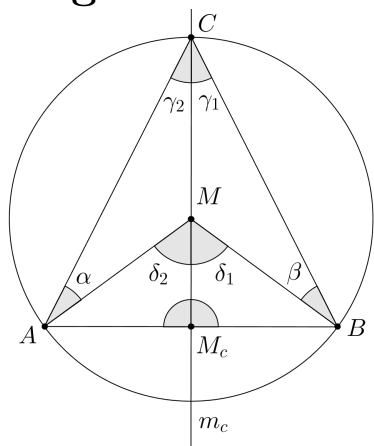
Abb. 02

Aufgabe

Punkte.

Beweisen Sie mit Bezugnahme auf die Skizze aus Abbildung 02: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
 Ergänzen Sie die Skizze in geeigneter Weise. Sie dürfen für den Beweis keine Sätze über die Eigenschaften von Vierecken verwenden,

13

Aufgabe 10: Beweisen wie die Schüler

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit dem Umkreis k . Der Punkt M sei der Mittelpunkt von k . Ferner sei m_c die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. Entsprechend Abbildung 03 möge m_c durch den Punkt C gehen. Ergänzen Sie die folgende Beweisführung, die sich auf die Skizze aus Abbildung 05 bezieht.

Abb. 03

Nr.	Beweisschritt	Begründung	Punkte	
(I)	$\overline{MA} \cong \overline{MB} \cong \overline{MC}$	...	1	
(II)	$M \in m_c$	...	2	
(III)	$ \angle AM_c M = \angle BM_c M = 90^\circ$	...	2	
(IV)	$\overline{MM_c} \cong \overline{MM_c}$	...	1	
(V)	$ MB > MM_c < MA $	...	3	
(VI)	$\overline{AMM_c} \cong \overline{BMM_c}$	...	5	
(VII)	$\delta_1 \cong \delta_2$	...	1	
(VIII)	$\beta \cong \gamma_1$	...	2	
(IX)	$ \delta_1 = 2 \cdot \gamma_1 $	...	2	
(X)	$\overline{MC} \cong \overline{MC}$	...	1	
(XI)	$\overline{AMC} \cong \overline{BMC}$	...	4	
(XII)	$\gamma_2 \cong \gamma_1$	...	2	
(XIII)	$ \delta_2 = 2 \cdot \gamma_1 $	...	2	
(XIV)	$ \delta_2 = 2 \cdot \gamma_2 $	...	2	
(XV)	$ \delta_1 + \delta_2 = 2 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2)$	...	2	

Platz für weitere Ausführungen

Die Axiome

Inzidenzaxiome

Axiom I.0

Geraden und Ebenen sind Punktmengen.

Axiom I.1 (Axiom von der Geraden)

Zu zwei beliebigen verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die die beiden Punkte enthält.

Axiom I.2

Zu jeder Geraden gibt es (wenigstens) zwei verschiedene Punkte, die dieser Geraden angehören.

Axiom I.3

Es gibt wenigstens 3 paarweise verschiedene Punkte, die nicht kollinear sind.

Axiom I.4

Zu je drei nichtkollinearen Punkten gibt es genau eine Ebene, die diese drei Punkte enthält. Jede Ebene enthält (wenigstens) einen Punkt.

Axiom I.5

Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene E liegen, so gehört g zu E .

Axiom I.6

Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie noch mindestens einen weiteren Punkt gemeinsam. **Axiom I.7**

Es gibt vier paarweise verschiedene Punkte, die nicht komplanar sind.

Abstandsaxiome

Axiom II.1 (Abstandsaxiom)

Zu je zwei Punkten A und B gibt es eine eindeutig bestimmte nicht negative reelle Zahl d mit $d = 0 \Leftrightarrow A = B$.

Axiom II.2

Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB| = |BA|$.

Axiom II/3 (Dreiecksungleichung)

Für drei beliebige Punkte A, B und C gilt $|AB| + |BC| \geq |AC|$.

Falls koll(ABC), dann ist eine der folgenden Gleichungen erfüllt

$$\begin{aligned} |AB| + |BC| &= |AC| \\ |AC| + |CB| &= |AB| \\ |BA| + |AC| &= |BC| \end{aligned}$$

Ist umgekehrt eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so sind A , B und C kollinear.

Axiome der Anordnung

Axiom III.1 (Axiom vom Lineal)

Zu jeder nicht negativen reellen Zahl d gibt es auf jedem Strahl p genau einen Punkt, der zum Anfangspunkt von p den Abstand d hat.

Axiom III.2 (Das Axiom von Pasch)

Gegeben sei ein Dreieck $\overline{ABC}$. Ferner sei g eine Gerade, die durch keinen der drei Eckpunkte A, B, C geht. Wenn g eine der drei Seiten des Dreiecks $\overline{ABC}$ schneidet, dann schneidet g genau eine weitere Seite des Dreiecks $\overline{ABC}$.

Axiome der Winkelmessung**Axiom IV.1** (Winkelmaßaxiom)

Zu jedem Winkel α gibt es genau eine reelle Zahl ω zwischen 0 und 180.

Axiom IV.2 (Winkelkonstruktionsaxiom)

Es sei $g \equiv SA$ eine Gerade in der Ebene E . Zu jeder reellen Zahl ω mit $0 < \omega < 180$ gibt es in jeder der beiden durch g bestimmten Halbebenen der Ebene E genau einen Strahl SB^+ mit $|\omega| = |\angle ASB|$.

Axiom IV.3 (Winkeladditionsaxiom)

Wenn der Punkt P zum Inneren des Winkels $\angle ASB$ gehört, dann gilt $|\angle ASP| + |\angle PSB| = |\angle ASB|$.

Axiom IV.4 (Supplementaxiom)

Nebenwinkel sind supplementär.

Das Kongruenzaxiom**Axiom V** (Kongruenzaxiom SWS)

Wenn für zwei Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ die folgenden 3 Kongruenzen

$$\begin{aligned}\overline{AB} &\cong \overline{DE} \\ \overline{AC} &\cong \overline{DF} \\ \angle CAB &\cong \angle FDE\end{aligned}$$

gelten,

dann sind die beiden Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent zueinander.

Euklidisches Parallelenaxiom**Axiom EP**

Zu jedem Punkt P außerhalb einer Geraden g gibt es höchstens eine Gerade h , die durch P geht und zu g parallel ist.