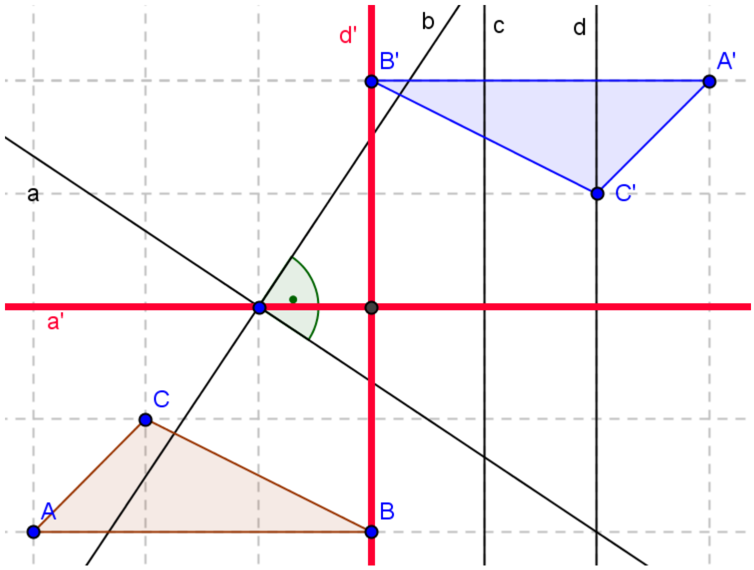
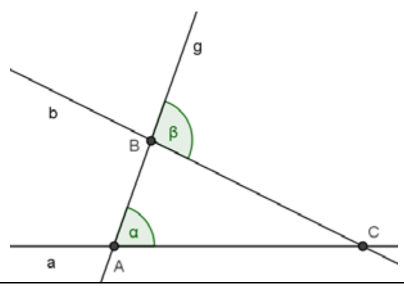
Aufgabe 1: Definieren

Nr.	Aufgabe	Punkte	
a)	Geben Sie eine formal korrekte Konventionaldefinition des Begriffs *achsensymmetrisches Viereck* an. *Wenn es eine Geradenspiegelung gibt, die ein Viereck auf sich selbst abbildet, so nennt man dieses Viereck achsensymmetrisches Viereck.*	2	
b)	Definieren Sie formal korrekt den Begriff *Drache* unter Berücksichtigung achsensymmetrischer Zusammenhänge. *Ein Viereck, bei dem eine Diagonale auf einer Symmetrieachse des Vierecks liegt, heißt Drachen.*	2	
c)	Was versteht man unter einer Verschiebung? Definieren Sie formal korrekt. *Die Verkettung zweier Geradenspiegelungen* $S_a \circ S_b$ *, bei denen die Geraden a und b parallel zueinander sind, heißt Verschiebung.*	2	
d)	Definieren Sie den Begriff *Punktspiegelung*, ohne den Begriff *Drehung* zu verwenden. *Die Verkettung zweier Geradenspiegelungen* $S_a \circ S_b$ *, bei denen die Geraden a und b senkrecht aufeinander stehen, heißt Punktspiegelung.*	2	
e)	Nennen Sie zwei Eigenschaften der Punktspiegelung, die im Allgemeinen nicht für eine Drehung gelten. *Eigenschaft 1: Geraden, die durch den Drehpunkt gehen, sind Fixgeraden* *Eigenschaft 2: Jede Gerade wird auf eine dazu parallele Bildgerade abgebildet, oder auch: Die Punktspiegelung ist eine involutorische Abbildung*	2	
f)	Ergänzen Sie die nachfolgende Definition des Begriffs *Viertelkreis (Definition Kreis sei vorausgesetzt).* Definition (Viertelkreis): Es sei *k* ein Kreis mit dem Mittelpunkt *M*. … *Die Schnittmenge des Kreises k mit dem Inneren eines rechten Winkels, dessen Scheitelpunkt M ist und in der gleichen Ebene wie k liegt, heißt Viertelkreis.*	2	

Aufgabe 2: Konstruieren, Argumentieren, Begründen, Beweisen

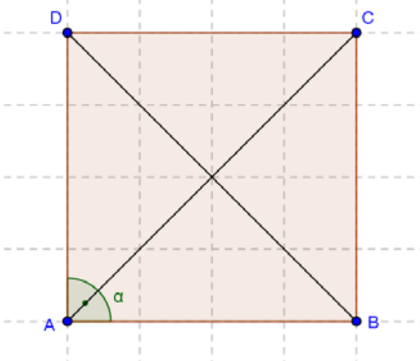
Nr.	Aufgabe	Punkte	
	Gegeben sei ein Dreieck $\overline{ABC}$ und die Geraden *a*, *b*, *c* und *d* mit: $a \perp b$ *und* $c \parallel d$ entsprechend der Skizze.  		
a)	Durch welche Abbildung kann die Verkettung der vier Geradenspiegelungen $S_a \circ S_b \circ S_c \circ S_d$ ersetzt werden (Begründen Sie Ihre Entscheidung)? *1)* $S_a \circ S_b = S_{a'} \circ S_{b'}$ *mit* $a' \perp b' \wedge b' \parallel c$ *Eigenschaft Drehung* *und gleichem Drehpunkt* *2)* $S_c \circ S_d = S_{c'} \circ S_{d'}$ *mit* $c' \equiv b' \wedge c' \parallel c$ *Eigenschaft Verschiebung* *3)* $S_a \circ S_b \circ S_c \circ S_d = S_{a'} \circ S_{b'} \circ S_{c'} \circ S_{d'} = S_{a'} \circ S_{d'}$ *1), 2)* *mit* $a' \perp d'$ *4) Ersatzabbildung: Punktspiegelung*	6	
b)	Zeichnen Sie die Achsen der Ersatzabbildung in die Skizze oben ein. Hinweis: Sie dürfen das Gitter im Hintergrund als Orientierung nutzen.	2	
c)	Konstruieren Sie oben in der Skizze das Bild des Dreiecks $\overline{ABC}$, das nach der Verkettung $S_a \circ S_b \circ S_c \circ S_d$ entsteht, mit Hilfe der Ersatzabbildung.	3	
d)	Wie lautet die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes? Sind die Stufenwinkel an geschnittenen Geraden kongruent zueinander, so sind diese Geraden zueinander parallel.	2	
e)	Beweisen Sie die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes. *Vor. kongruente Stufenwinkel* $\alpha \cong \beta$ *Beh.* $a \parallel b$ *Annahme:* $a \nparallel b$ *1)* $a \cap b = \{C\}$ *Annahme* *2)* $\lvert\alpha\rvert < \lvert\beta\rvert$ *schwacher Außenwinkelsatz* *3) Widerspruch zur Voraussetzung*  	4	

Aufgabe 3: Kriterien

Nr.	Aufgabe	Punkte	
a)	Definieren Sie den Begriff *Quadrat* durch dessen Seiten- und Winkeleigenschaften formal korrekt. Verwenden Sie dabei als Oberbegriff lediglich den Begriff Viereck. **Definition 1:** *Ein Viereck mit vier zueinander kongruenten Seiten und einem rechten Innenwinkel heißt Quadrat.*	2	
b)	Außer dass die Diagonalen eines Quadrats auf Symmetrieachsen liegen, gibt es noch drei andere Eigenschaften, die jeweils die Beziehung der Diagonalen zueinander näher beschreiben. Nennen Sie diese Eigenschaften der Diagonalen im Quadrat: Eigenschaft **E1**: Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig Eigenschaft **E2**: Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander Eigenschaft **E3**: Die Diagonalen sind gleichlang	3	
c)	**Satz 3a**: Wenn $\overline{ABCD}$ ein Quadrat entsprechend **Definition 1** ist, dann hat $\overline{ABCD}$ die Eigenschaft **E1**. Beweisen Sie **Satz 3a** (auf der nachfolgenden Seite). Für diesen Beweis dürfen Sie außer der **Definition 1** keine weiteren Sätze oder Definitionen zu Vierecken verwenden.	4	
d)	**Satz 3b**: Wenn $\overline{ABCD}$ ein Quadrat entsprechend **Definition 1** ist, dann hat $\overline{ABCD}$ die Eigenschaft **E2**. Beweisen Sie **Satz 3b** (auf der nachfolgenden Seite). Für diesen Beweis dürfen Sie außer der **Definition 1** keine weiteren Sätze oder Definitionen zu Vierecken verwenden.	4	
e)	**Satz 3c**: Wenn $\overline{ABCD}$ ein Quadrat entsprechend **Definition 1** ist, dann hat $\overline{ABCD}$ die Eigenschaft **E3**. Beweisen Sie **Satz 3c** (auf der nachfolgenden Seite). Für diesen Beweis dürfen Sie außer der **Definition 1** keine weiteren Sätze oder Definitionen zu Vierecken verwenden.	4	
f)	Ebenso wie die Sätze 3a, 3b und 3c gilt der folgende Satz. **Satz 3d**: Wenn ein Viereck den Eigenschaften **E1**, **E2** und **E3** genügt, dann ist das Viereck ein Quadrat. Formulieren Sie auf der Grundlage von 3a, 3b, 3c und 3d ein Quadratkriterium (Die Eigenschaften E1-E3 sind dabei auszuformulieren). *Genau dann, wenn die Diagonalen eines Vierecks senkrecht aufeinander stehen, sich gegenseitig halbieren und gleich lang sind, dann ist das Viereck ein Quadrat.*	3	

Beweise 3a-3c:

Anmerkung: die Beweise beziehen sich auf die nebenstehende Skizze.



Beweis Satz 3a:
Vor. Definition Quadrat
Beh. Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig

Beweis:

Beweisschritt	**Begründung**
1) $\lvert AD \rvert = \lvert AB \rvert$	Vor.
2) $A \in Mittelsenkr.\ \overline{BD}$	1), Mittelsenkrechtenkriterium
3) $\lvert CD \rvert = \lvert CB \rvert$	Vor.
4) $C \in Mittelsenkr.\ \overline{BD}$	3), Mittelsenkrechtenkriterium
5) AC ist Mittelsenkr. von $\overline{BD}$	2), 4)
6) AC halbiert die Diagonale $\overline{BD}$	5), Def. Mittelsenkr.
7) analoge Überlegungen führen zur Erkenntnis: BD ist Mittelsenkr. von $\overline{AC}$	
8) BD halbiert die Diagonale $\overline{AC}$	7)
Behauptung stimmt	6), 8)

Beweis Satz 3b:
Vor. Definition Quadrat
Beh. Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander
Beweis: Nach dem Beweis von Satz 3a gilt, dass die Diagonalen jeweils auf den Mittelsenkrechten der Diagonalen liegen. Daraus folgt unmittelbar nach Definition Mittelsenkrechte, dass die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

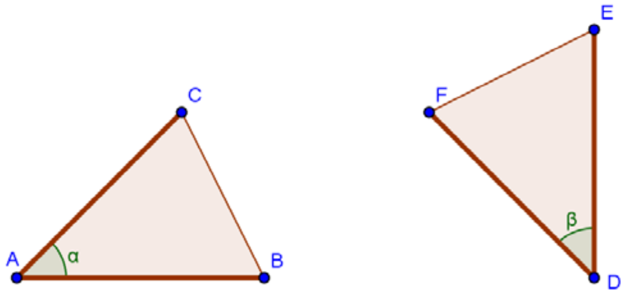
Beweis Satz 3c:
Vor. Definition Quadrat
Beh. Die Diagonalen sind gleich lang.
Beweis: (Es geht natürlich auch über Kongruenzgeometrie)

Beweisschritt	**Begründung**
1) $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{S\}$	Diagonalen schneiden sich
2) $\lvert AS \rvert = \lvert SC \rvert$	1), Satz 3a
3) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$	Satz 3b
4) $S_{BD}(A) = (C)$	2, 3), Def. Geradenspiegelung
5) $\lvert \alpha \rvert = \lvert < BCD \rvert = 90$	4); Winkeltreue der Geradensp.
6) $\lvert < ADC \rvert = \lvert < ABC \rvert = 90$	5), Satz 3a, Satz 3b, Def. Geradensp., Winkeltreue der Geradensp.
7) $\lvert < SAD \rvert = \lvert < SDA \rvert = 45$	6), 4), Winkeltreue
8) $\lvert AS \rvert = \lvert SD \rvert$	7), Umkehrung des Basiswinkelsatzes
9) analog gilt: $\lvert AS \rvert = \lvert SB \rvert = \lvert SC \rvert = \lvert SD \rvert$	6), 7), 8)
10) Behauptung stimmt	9)

Aufgabe 4: Beweise vervollständigen

Der Kongruenzsatz SWS lautet wie folgt:

Wenn die Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ in zwei Seitenlängen und der Größe des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen, dann sind die Dreiecke zueinander kongruent.



Beweis: (Hinweis: Wir beziehen uns bei dem folgenden Beweis auf die obige Skizze).

Vorraussetzung: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$; $\overline{AC} \cong \overline{DF}$; $\alpha \cong \beta$ [1]

Behauptung: $\overline{ABC} \cong \overline{DEF}$, d. h.: $\exists$ Abb. φ mit: $\varphi(\overline{ABC}) = \overline{DEF}$ [1]

	Beweisschritt	**Begründung**	**Punkte**	
1.	$Verschiebung \quad V(\overline{ABC}) = \overline{A^{'}B^{'}C^{'}}$ $mit \quad A^{'} \equiv D$	Eigenschaft Verschiebung	0,5	
2.	$D_{(A^{'}, <B^{'}A^{'}E)}(\overline{A^{'}B^{'}C^{'}}) = \overline{A^{''}B^{''}C^{''}}$	Definition Drehung	0,5	
3.	$D \equiv A^{``}$	1.), 2.) (A’ ist Fixpunkt)	1	
4.	$E \equiv B^{``}$	Vor., 2.), Längentreue der Geradenspieg.	1,5	
5.	$\lvert\alpha^{''}\rvert = \lvert\beta\rvert$	Vor., Winkeltreue der Geradenspiegelung	1	
6.	$1. \quad Fall: \quad \alpha^{''} \equiv \beta$			
7.	$C^{''} \in DF^{+}$	6.)	0,5	
8.	$C^{''} \equiv F$	Vor., 3.), 7.), Längentreue der Geradensp.	1	
9.	Behauptung stimmt	3.), 4.), 8.)	1,5	
10.	$2. \quad Fall: \quad \alpha^{''} \not\equiv \beta$			
11.	$DE \quad ist \quad Mittelsenkr. \quad von \quad \overline{C^{''}F}$	Hilfssatz, den wir hier nicht beweisen wollen!		
12.	$S_{DE}(C^{''}) = C^{'''} \quad mit \quad C^{'''} \equiv F$	11.), Def. Geradenspiegelung	1	
13.	$S_{DE}(A^{''}) = D; \quad S_{DE}(B^{''}) = E$	3.), 4.), Def. Geradenspiegelung	1,5	
14.	Behauptung stimmt	12.), 13.)	1	

Auswertung:

Punkte	Note		Punkte	Note
62	1		30	4,5
61	1		29	4,5
60	1		28	4,5
59	1		27	4,5
58	1		26	4,5
57	1,5		25	4,5
56	1,5		24	4,5
55	1,5		23	5
54	1,5		22	5
53	2		21	5
52	2		20	5
51	2		19	5
50	2		18	5
49	2		17	5
48	2,5		16	5
47	2,5		15	5,5
46	2,5		14	5,5
45	2,5		13	5,5
44	3		12	5,5
43	3		11	5,5
42	3		10	5,5
41	3		9	5,5
40	3		8	5,5
39	3,5		7	6
38	3,5		6	6
37	3,5		5	6
36	3,5		4	6
35	4		3	6
34	4		2	6
33	4		1	6
32	4		0	6
31	4			

Erreichte Punkte	Note