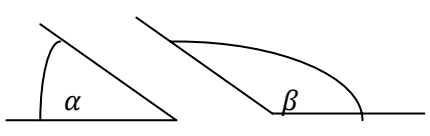
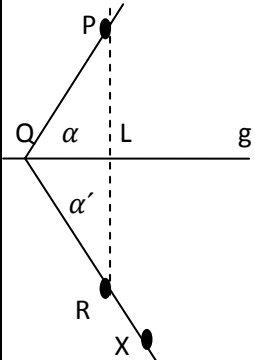


Lösung zur ATP Geometrie SoSe 12

Aufgabe 1: Definieren

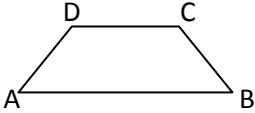
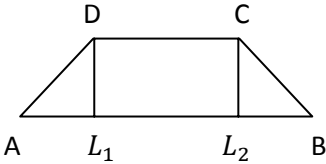
a)	Definieren Sie den Begriff <i>Winkel</i> $\sphericalangle ASB$. Es seien A, B und C drei paarweise verschiedene, nichtkollineare Punkte. Die Vereinigungsmenge der Strahlen SA^+ und SB^+ heißt Winkel $\sphericalangle ASB$.	2	
b)	Ergänzen Sie (I steht für Inneres): $I(\sphericalangle ASB) := \{P P \in SA, B^+ \wedge P \in SB, A^+\}$	2	
c)	Die Winkel α und β seien Stufenwinkel. Ergänzen Sie: α und γ sind Wechselwinkel, wenn γ und β Scheitelwinkel sind.	1	
d)	Begründen Sie mit einer Skizze, warum die folgende Definition nicht korrekt ist: α und β heißen Nebenwinkel $:\Leftrightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$. 	1	
e)	Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Definieren Sie: Durchmesser von k. Hinweis: Ein Durchmesser ist eine Strecke. Die Strecke $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser von k, wenn $A, B \in k$ und $M \in \overline{AB}$.	2	
f)	Welcher Begriff wird hier definiert: Es sei $\overline{ABCD}$ ein Viereck in der Ebene ε. $\overline{ABCD}$ heißt ... $:\Leftrightarrow \exists M \in \varepsilon : \overline{AM} \cong \overline{BM} \cong \overline{CM} \cong \overline{DM}$ Sehnenviereck	1	
g)	Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Der Begriff AB^+ sei bereits definiert. Definieren Sie unter expliziter Verwendung von AB^+ den Begriff $AB^- := AB \setminus AB^+ \cup \{A\}$	2	
h)	Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Definieren Sie α ist Peripheriewinkel von k: α ist Peripheriewinkel von k, wenn der Scheitelpunkt S von α Element von k ist und jeder Schenkel von α k in genau einem weiteren Punkt schneidet.	2	

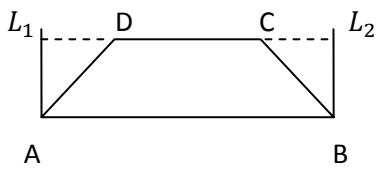
Aufgabe 2: Argumentieren, Begründen, Beweisen

a)	Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Wann gilt $P \in AB^+ \wedge P \in AB^-$? Wenn $P=A$.	1	
b)	Es seien A, B und C drei paarweise verschiedene Punkte. Begründen Sie durch Nennung eines Axioms, dass $ AC + CB < AB $ nicht gelten kann. Dreiecksungleichung	1	
c)	Es seien A, B und P drei paarweise verschiedene Punkte. Begründen Sie: $P \in \overline{AB} \Rightarrow P \notin AB^-$ Nur der Punkt A ist sowohl Element der Menge $\overline{AB}$ als auch der Menge AB^- . (Nach Definition Strahl, Definition Strecke, es gilt genau eine Zwischenrelation). Nach Voraussetzung ist aber $P \neq A$. Somit gilt die Implikation.	3	
d)	Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck. Ferner seien folgende Punktmengen gegeben: $m_a := \{P \overline{PC} \cong \overline{PB}\}$ und $m_b := \{P \overline{PC} \cong \overline{PA}\}$. Es gelte $m_a \cap m_b = \{Z\}$. Formulieren Sie mittels Z eine hinreichende Bedingung dafür, dass $ \sphericalangle ACB = 90^\circ$ gilt. Z ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$.	1	
e)	Begründen Sie durch Nennung eines Satzes, warum Ihre Bedingung aus Teilaufgabe d) $ \sphericalangle ACB = 90^\circ$ nach sich zieht. Satz des Thales	1	
f)	In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte A $(-1 0)$, B $(1 0)$ und C $(0 1)$ gegeben. Die Gerade m mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}$ schneidet $\overline{AC}$ im Punkt $S_1 \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)$ und $\overline{BC}$ im Punkt $S_2 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)$. Nach welchem Axiom hat m mit $\overline{AB}$ keinen gemeinsamen Punkt? Axiom von Pasch	1	
g)	Es sei $P \notin g \wedge Q \in g$: PQ nicht senkrecht auf g. Beweisen Sie die Existenz des Lotes von P auf g. (siehe Skizze) (Grundidee: Punkt R konstruieren, sodass PR senkrecht auf g steht.) 	6	

g)	Beweis: (1) $\exists QX^+ \subset gP^-$ mit $ \alpha = \alpha' $ (Winkelkonstruktionsaxiom) (2) $\exists R \in QX^+$ mit $ QR = QP $ (Axiom vom Lineal) (3) $RP \cap g = \{L\}$ (R, P in unterschiedlichen HE bezüglich g nach 1,2) (4) Dreieck $\overline{QLP} \cong \text{Dreieck } \overline{QLR}$ (SWS mit 1,2, $ QL = QL $ trivial) (5) $ \angle PLQ = \angle RLQ $ (4, Def. Dreieckskongruenz) (6) $ \angle PLQ = \angle RLQ = 90^\circ$ (5, Def. Nebenwinkel, Def. rechte Winkel) (7) $\overline{PL}$ ist ein Lot von P auf g (6, Def. Lot)		
----	--	--	--

Aufgabe 3: Kriterien

a)	Wir nennen den Satz, den Lisas Schüler vermuten, Satz 1. Formulieren Sie Satz 1 in der Form <i>Wenn-Dann</i> . Wenn ein Trapez gleichschenklig ist sind seine Diagonalen kongruent zueinander.	2	
b)	Lisa erarbeitet mit ihren Schülern eine Skizze. Formulieren Sie Voraussetzungen und Behauptungen von Satz 1. V1: $DC \parallel AB$ V2: $ DA = CB $ B: $ AC = BD $ 	2	
c)	Beweisen Sie Satz 1. Beziehen Sie sich auf eine Skizze. Hinweis: K_p hilft: $a \parallel b \Leftrightarrow \forall P, Q \in a : Pb = Qb $ Bew:  (1) Es existiert das Lot von D auf AB und von C auf AB, erhalte Lotfußpunkte L_1 und L_2 . (Ex, Eind. Lot) (2) $ DA = CB $ (V2) (3) $ DL_1 = CL_2 $ (K_p und V1) (4) $ \angle DL_1A = \angle CL_2B = 90^\circ$ (Def. Lot, 1) (5) Dreieck $\overline{DL_1A} \cong \text{Dreieck } \overline{CL_2B}$ (SsW, 2-4, rechter Wi größter Wi im Dreieck) (6) $ AL_1 = BL_2 $ (5, Def. Dreieckskongruenz) (7) $ BL_1 = AL_2 $ (6, Rechnen in R) (8) Dreieck $\overline{BL_1D} \cong \text{Dreieck } \overline{AL_2C}$ (SWS, 1, 3, 7) (9) $ AC = BD $ (8, Def. Dreieckskongruenz)	7	
d)	Ergänzen Sie die Umkehrung von Satz 1: Satz 2: Wenn ein Trapez kongruente Diagonalen hat, dann ist es gleichschenkl.	2	

e)	Definition T: Ein Viereck mit einem Paar paralleler Seiten heißt Trapez. Beweisen Sie Satz 2. V1: $DC \parallel AB$ V2: $AC = BD$ B: $DA = CB$  Beweis: (1) Es existiert das Lot von A auf CD und von B auf CD, erhalte Lotfußpunkte L_1 und L_2. (Ex, Eind. Lot) (2) $AC = BD$ (V2) (3) $AL_1 = BL_2$ (K_p und V1) (4) $\angle AL_1D = \angle BL_2C = 90^\circ$ (Def. Lot, 1) (5) Dreieck $\overline{AL_1C} \cong$ Dreieck $\overline{BL_2D}$ (SsW, 2-4, rechter Wi größter Wi im Dreieck) (6) $DL_1 = CL_2$ (5, Def. Dreieckskongruenz, Rechnen in R) (7) Dreieck $\overline{DL_1A} \cong$ Dreieck $\overline{CL_2B}$ (SWS, 3, 4, 6) (8) $DA = CB$ (6, Def. Dreieckskongruenz)	7	
f)	Definieren Sie den Begriff gleichschenkliges Trapez unter Verwendung des Oberbegriffs Trapez und des durch die Sätze 1 und 2 nun gültigen Kriteriums. Ein Trapez mit kongruenten Diagonalen heißt gleichschenkliges Trapez.	3	

Aufgabe 4: Beweisen wie die Schüler

Skizze und Beweisschritte siehe Klausur, hier finden Sie nur die Begründungen.

Satz des Thales:

Es seien $\overline{ABC}$ ein Dreieck und k ein Kreis mit Mittelpunkt M.

Wenn (V1) k Umkreis von $\overline{ABC}$ ist und (V2) $M \in \overline{AB}$ dann (B) $|\angle ACB| = 90^\circ$.

Nr.	Begründung		
(I)	Radien von k	1	
(II)	Innenwinkelsumme im Viereck	1	
(III)	I, Basiswinkelsatz	2	
(IV)	II, III	2	
(V)	IV	1	
(VI)	trivial	1	
(VII)	Scheitelwinkelsatz	1	
(VIII)	SWS, I, VII	3	
(IX)	VIII (Dreieckskongruenz)	1	
(X)	VI, IX, WSW	3	
(XI)	X	1	
(XII)	V, XI	2	
(XIII)	XII	-	