Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 8

(Lösungen)

1. Zwei voneinander verschiedene Ebenen haben entweder keinen Punkt oder eine Gerade gemeinsam, auf der alle gemeinsamen Punkte beider Ebenen liegen.

Beweis:

Es seien ε_1 und ε_2 zwei Ebenen.

Fall 1: Die beiden Ebenen haben keinen Punkt gemeinsam.
Dieser Fall ist trivial.

Fall 2: Die beiden Ebenen haben einen Punkt gemeinsam.
sei $P_1 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$

Behauptungen:

1. Es existiert eine Gerade g, die beiden Ebenen angehört:
   $\exists g \in \mathrm{G} : g \subseteq \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$
2. Es existiert kein Punkt, der im Schnitt der beiden Ebenen liegt, aber nicht zu g gehört:
   $\neg \exists P_3 \in \mathrm{P} : P_3 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_3 \notin g$

Beweis von Behauptung 1:

(1)	$P_1 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$	Voraussetzung Fall 2
(2)	$\exists P_2 \in P : P_2 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_2 \neq P_1$	Axiom I/6: Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie noch mindestens einen weiteren Punkt gemeinsam.
(3)	Es existiert genau eine Gerade P_1P_2, die durch beide Punkte geht.	Axiom I/1: Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.
(4)	$P_1P_2 \subseteq \varepsilon_1$	Axiom I/5: Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene ε liegen, so liegt jeder Punkt von g in ε.
(5)	$P_1P_2 \subseteq \varepsilon_2$	Axiom I/5: Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene ε liegen, so liegt jeder Punkt von g in ε.
(6)	$P_1P_2 \subseteq \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$	Folgt aus (4) und (5)

Behauptung 1 ist damit bewiesen.

Beweis von Behauptung 2:

Klassischer Fall für einen indirekten Beweis.

Annahme:

$\exists P_3 \in \mathrm{P} : P_3 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_3 \notin g$

(Zeigen wollen wir jetzt natürlich, dass doch $P_3 \in g$ gilt.)

(1)	$P_3 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_3 \notin P_1P_2$	nach Annahme, andere Schreibweise für g
(2)	ε_1 und ε_2 sind zwei verschiedene Ebenen	Voraussetzung für alle unsere Behauptungen
(3)	$P_1 \in \varepsilon_1 \wedge P_1 \in \varepsilon_2$	Punkt aus Beweis Behauptung 1
(4)	$P_2 \in \varepsilon_1 \wedge P_2 \in \varepsilon_2$	Punkt aus Beweis Behauptung 1
(5)	$nkoll(P_1, P_2, P_3)$	(1)
(6)	$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$	(1), (3), (4), (5) und Axiom I/4: Zu je drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten gibt es genau eine Ebene, die diese drei Punkte enthält.
↯ (6) ist ein Widerspruch zu ε_1 und ε_2 sind zwei verschiedene Ebenen! Die Annahme ist zu verwerfen!		

2. Beweisen Sie folgenden Satz auf Grundlage der Inzidenzaxiome für den Raum (I/0–I/7):
   Es existieren (mindestens) 6 paarweise verschiedene Geraden.

Beweis:

- Nach I/7 gibt es vier Punkte A, B, C und D, die nicht komplanar sind.
- Es gibt also 6 Paare verschiedener Punkte und nach I/1 wird dadurch jeweils eine Gerade bestimmt: AB, AC, AD, BC, BD, CD.
- Es bleibt zu zeigen, dass die Geraden AB, AC, AD, BC, BD und CD paarweise verschieden sind. Wir beweisen $AB \neq AC$.
- Indirekter Beweis:
  - Wäre $AB = AC$, so würde C der Geraden AB angehören.
  - Die Punkte A, B und D sind nicht kollinear, denn würden A, B und D auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so lägen sogar alle vier Punkte A, B, C und D auf dieser Geraden (weil nach Annahme $AB = AC$). Unter Hinzuziehung eines Punktes E, der nicht auf AB liegt (existiert nach I/3) wäre damit klar, dass A, B, C, D in einer Ebene liegen, was der Einführung dieser Punkte unter Berufung auf I/7 widerspricht.
  - Durch A, B und D wird nach I/4 eine Ebene ABD bestimmt.
  - Wegen I/5 und wegen $C \in AB$ gehört C zur Ebene $ABD \Rightarrow A$, B, C und D liegen in einer Ebene $\Rightarrow$ Widerspruch zur Einführung dieser Punkte mit I/8.
- Also ist $AB \neq AC$. Analog lässt sich zeigen $AB \neq AD$, $AB \neq BC$ usw.
  Es gibt also 6 paarweise verschiedene Geraden.

3. Beweisen Sie: Ist O ein beliebiger Punkt einer Geraden g und A ein weiterer (von O verschiedener) Punkt dieser Geraden, so gilt für die Halbgeraden OA^+ und OA^-:
   a) $OA^+ \cap OA^- = \{O\}$ und b) $OA^+ \cup OA^- = g$.

BEWEIS:

a) Nach Definition ist $OA^+ := \{P \mid \mathrm{Zw}(O,A,P) \vee \mathrm{Zw}(O,P,A)\} \cup \{O,A\}$ und
$OA^- := \{P \mid \mathrm{Zw}(P,O,A)\} \cup \{O\}$.

Damit ist offensichtlich, dass O der Schnittmenge $OA^+ \cap OA^-$ angehört und es bleibt zu zeigen, dass dies für keinen von O verschiedenen Punkt zutrifft.

Indirekter Beweis: Wir nehmen an, ein Punkt $P \neq O$ möge sowohl zu OA^+ als auch zu OA^- gehören. Dann gilt:

$\big(\mathrm{Zw}(OAP)$ oder $\mathrm{Zw}(OPA)$ oder $P = A\big)$ und $\mathrm{Zw}(POA)$.

Von drei Punkten kann nur einer zwischen den beiden anderen liegen, was unsere Annahme für den Fall $P \neq A$ sofort zum Widerspruch führt:

weder $\mathrm{Zw}(OAP)$ und $\mathrm{Zw}(POA)$ ist gleichzeitig möglich, noch $\mathrm{Zw}(OPA)$ und $\mathrm{Zw}(POA)$.

Da für $O \neq A$ nach Definition der Zwischenrelation nicht $\mathrm{Zw}(AOA)$ gelten kann, gehört der Punkt A nicht zu OA^-.

Es gibt also außer O keinen Punkt $P \in OA^{+} \cap OA^{-}$ – die Behauptung a) ist somit bewiesen.

b) Es sei Q ein beliebiger (von O verschiedener) Punkt der Geraden g.

Nach Folgerung 3 liegt von den Punkten O, A und Q einer zwischen den beiden anderen oder Q ist mit A identisch.

In beiden Fällen gehört Q definitionsgemäß einer der beiden Halbgeraden OA^{+} und OA^{-} und somit der Vereinigungsmenge $OA^{+} \cup OA^{-}$ an.

Da Q beliebig gewählt war, ist damit auch die Behauptung b) gezeigt.