Übung 7 (SoSe 12) Lösungen

Aufgabe 7.1

Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Welche Ergebnisse erzielen Sie nach den folgenden Mengenoperationen?

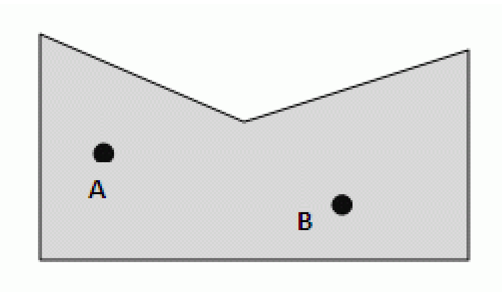
a) $AB^{+} \cap BA^{+} =$ $\overline{AB}$

b) $AB^{-} \cap BA^{-} =$ { }

c) AB geschnitten mit dem Kreis um A durch B = { B, B* } mit B* ϵ AB, B ≠ B*, IBAI = IB*AI

d) $AB \cap BA =$ AB

Aufgabe 7.2



Student XY argumentiert: "Weil $\overline{AB}$ komplett innerhalb der Punktmenge liegt, ist die Figur konvex."
Wo liegt XYs Denkfehler?

Student XY hat nicht bedacht, dass dies nicht für alle Punkte innerhalb der Figur gilt. Gegenbeispiel: Punkt S liegt in der linken oberen Ecke, Punkt R in der rechten oberen Ecke. Ihre Strecke liegt nicht mehr vollständig in der Figur.

Aufgabe 7.3

Satz: Der Durchschnitt zweier konvexer Punktmengen ist konvex.

a) Beweisen Sie den Satz.
b) Wie lautet die Kontraposition?
c) Wie lautet die Umkehrung? Widerlegen Sie die Umkehrung durch eine Skizze.

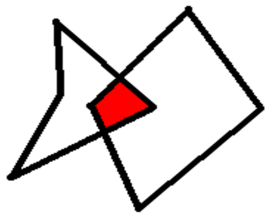
Vor: Punktmenge M1 und M2 konvex
Beh: Durchschnitt von M1 und M2 konvex
zu zeigen: I.) Seien P,Q zwei beliebige Punkte aus M1, M2 => II.) $\overline{PQ} \subset (M1 \cap M2)$

1.) P,Q ϵ M1 und P,Q ϵ M2	I.)
2.) $\overline{PQ} \subset$ M1 und $\overline{PQ} \subset$ M2	1, Definition konvexe Punktmenge, Vor
3.) $\overline{PQ} \subset$ Schnittmenge von M1 und M2	2, Definition Schnittmenge

Kontraposition: Wenn der Durchschnitt zweier Punktmengen nicht konvex ist, dann ist min. eine der beiden Punktmengen nicht konvex.

Umkehrung: Wenn der Durchschnitt zweier Punktmengen konvex ist, dann sind die Punktmengen konvex.

Gegenbeispiel:



Aufgabe 7.4

Ergänzen Sie die Definition für offene Halbebenen gQ^{+} und gQ^{-}
("Offen" bedeutet hier: Die Halbebene **ohne** die Gerade, die die Ebene teilt).
Definition (offene Halbebene):

Es sei E eine Ebene, in der die Gerade g und der Punkt Q liegen mögen. Q gehöre nicht zu g. Unter den offenen Teilmengen gQ^{+} und gQ^{-} bezüglich der Trägergeraden g versteht man die folgenden Teilmengen von E:

$gQ^+ := \{ P \in E \mid \overline{PQ} \cap g = \{ \} \}$

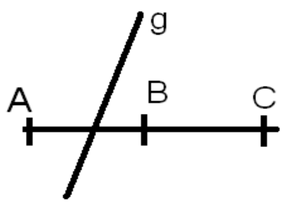
$gQ^- := \{ P \in E \mid \overline{PQ} \cap g \neq \{ \} \} \setminus g$

Aufgabe 7.5

Gegeben seien drei paarweise verschiedene und kollineare Punkte A, B und C in einer Ebene E. Außerdem sei eine Gerade g Teilmenge von E, wobei keiner der Punkte A, B und C auf g liegen möge.
Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\overline{AB} \cap g \neq \{ \} \wedge \overline{BC} \cap g = \{ \} \Rightarrow \overline{AC} \cap g \neq \{ \}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der der oben genannte Zusammenhang ersichtlich wird.
b) Beweisen Sie den oben genannten Zusammenhang.



Vor: $A \neq B \neq C \neq A$, koll (A, B, C), A, B, C $\notin$ g, $\overline{AB} \cap g \neq \{ \}$, $\overline{BC} \cap g = \{ \}$
Beh: $\overline{AC} \cap g \neq \{ \}$

Fälle: 1.) Zw (A, B, C) 2.) Zw (A, C, B) 3.) Zw (B, A, C) nach Aufgabe 5.1

1.) Zw (A, B, C)

1.) $\overline{AB} \subset \overline{AC}$	Aufgabe 5.2
2.) $\overline{AB} \cap g = \{ P \}$	Vor.
3.) $\overline{AC} \cap g = \{ P \}$	1, 2, Definition Teilmengen

2.) Zw (A, C, B)

1.) $\overline{AC} \subset \overline{AB}$	Aufgabe 5.2
2.) $\overline{AB} \cap g = \{ P \}$, $\overline{BC} \cap g = \{ \}$	Vor.
3.) $\overline{AC} \cap g = \{ P \}$	1, 2, Definition Teilmengen

3.) Zw (B, A, C)

1.) $\overline{BA} \subset \overline{BC}$	Aufgabe 5.2
2.) $\overline{AB} \cap g = \{ P \}$	Vor.
3.) $\overline{BC} \cap g = \{ P \}$	1, 2, Definition Teilmengen
4.) Widerspruch zur Vor., Fall 3 verwerfen	3