

## Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 6 (Lösungen)

### Aufgabe zur Wiederholung „Relationen“:

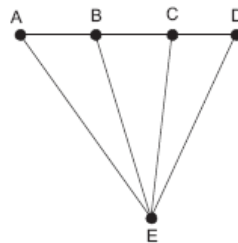
1. **Aufgabe:** Wir betrachten eine Gerade  $g$  und auf dieser Geraden die Relation Punkt  $A$  liegt links von Punkt  $B$  ohne exakte Definition in intuitiver Form. Welche der folgenden Eigenschaften trifft auf diese Relation zu?
  - (a) Für jeden Punkt  $A$  von  $g$  gilt:  $A$  liegt links von sich selbst.
  - (b) Für je zwei Punkte  $A$  und  $B$  der Geraden  $g$  gilt: Wenn  $A$  links von  $B$  liegt, dann liegt  $B$  auch links von  $A$ .
  - (c) Für je drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  der Geraden  $g$  gilt: Wenn  $A$  links von  $B$  und  $B$  links von  $C$  liegt, dann liegt  $A$  auch links von  $C$ .
  - (d) Für alle Punkte der Geraden  $g$  gilt: Es existiert kein Punkt, der links neben sich selbst liegt.
  - (e) Für je zwei Punkte  $A$  und  $B$  der Geraden  $g$  gilt: entweder liegt  $A$  links von  $B$  oder  $B$  liegt links von  $A$  oder die beiden Punkte  $A$  und  $B$  sind identisch.

**Lösung:** Wir betrachten die Wahrheitswerte der Aussagen.

- (a) Die Aussage ist falsch. Die Relation ist also nicht reflexiv.
- (b) Die Aussage ist falsch. Die Relation ist also nicht symmetrisch.
- (c) Die Aussage ist wahr. Die Relation ist also transitiv.
- (d) Die Aussage ist wahr.
- (e) Die Aussage ist wahr.

### Aufgaben zur Inzidenzgeometrie:

2. **Aufgabe:** Gegeben sei eine Punktmenge  $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E\}$  und eine dazugehörige Geradenmenge  $\mathcal{G} = \{\{A, B, C, D\}, \{A, E\}, \{B, E\}, \{C, E\}, \{D, E\}\}$ . Zeigen Sie, dass in dem so konstruierten Modell die Axiome I1 bis I3 gelten.



Zu zeigen gilt, dass die Axiome I1 bis I3 erfüllt sind.

*Axiom I1:* Wählt man zwei beliebige Punkte aus  $\mathcal{P}$  aus, so sind sie in genau einer der Teilmengen der Geradenmenge  $\mathcal{G}$  enthalten. Je zwei verschiedenen Punkten wird somit genau eine Gerade zugeordnet.

*Axiom I2:* Dieses Axiom ist erfüllt, da im vorgestellten Modell jede Gerade aus zwei oder mehr Punkten besteht und somit jede Gerade im Modell mindestens zwei Punkte enthält.

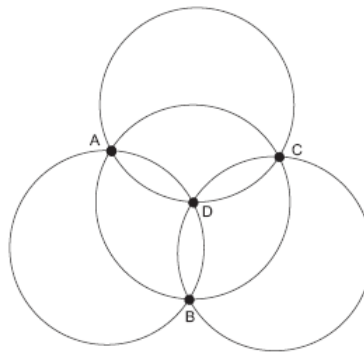
*Axiom I3:* Beispielsweise liegen die Punkte  $A, B, E$  nicht alle auf einer Geraden, daher gibt es mindestens 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

**3. Aufgabe:** Weisen Sie nach, dass durch:

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\} \text{ und } \mathcal{G} = \{\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}\}$$

kein Modell der Axiomengruppe I gegeben ist. Welches Axiom ist nicht erfüllt?

**Lösung:** Damit das gegebene Modell kein Modell im Sinne der Inzidenzaxiome ist, reicht es zu zeigen, dass ein Inzidenzaxiom nicht gilt: Durch die Punkte  $A$  und  $B$  verlaufen zwei verschiedene Geraden:  $\{A, B, C\}$  und  $\{A, B, D\}$ . Dies widerspricht der Eindeutigkeitsaussage („genau eine Gerade“) in Axiom I1.



**4. Aufgabe:** Zeigen Sie: Zu jeder Geraden existiert ein nicht zur Geraden gehörender Punkt.

**Lösung:** Voraussetzung: Gerade  $g$

*Behauptung:* Es existiert ein Punkt, der nicht zu  $g$  gehört.

*Beweis:* Aufgrund des Axioms I3 gibt es drei Punkte  $A, B, C$ , die nicht kollinear sind. Folglich können nur zwei dieser Punkte zu  $g$  gehören. Also existiert ein nicht zu  $g$  gehörender Punkt.