

5 Übungsaufgaben Untergruppen

Aufgabe 5.1

Untergruppen der Gruppe der Deckabbildungen des Quadrates

Erstellen Sie einen Untergruppengraphen der Gruppe der Deckabbildungen des Quadrates.

Aufgabe 5.2

Untergruppen der $[\mathbb{Z}_{12}, \oplus]$

Geben Sie alle Untergruppen der $[\mathbb{Z}_{12}, \oplus]$ an.

Aufgabe 5.3

Untergruppen der $[\mathbb{Z}_7, \oplus]$

Geben Sie alle Untergruppen der $[\mathbb{Z}_7, \oplus]$ an.

Aufgabe 5.4

Untergruppenkriterium 1

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz 5.1

Untergruppenkriterium 1

*Es seien $[G, \circ]$ eine Gruppe und U eine nichtleere Teilmenge von G .
 $[U, \circ]$ ist genau dann eine Untergruppe von $[G, \circ]$ wenn,*

1.) $\circ$ abgeschlossen auf U ist und

2.) $\forall u \in U : u^{-1} \in U$ gilt.

Aufgabe 5.5

Schnitt zweier Untergruppen

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz 5.2

Der Schnitt zweier Untergruppen ist eine Untergruppe

*Wenn $[U_1, \odot]$ und $[U_2, \odot]$ zwei Untergruppen von $[G, \odot]$ sind,
dann ist $[U_1 \cap U_2, \odot]$ auch eine Untergruppe von $[G, \odot]$.*

Aufgabe 5.6

Eine Untergruppe der ganzen Zahlen

Beweisen Sie, dass die geraden Zahlen eine Untergruppe der ganzen Zahlen sind. (Alles bezüglich der Addition). Verwenden Sie für den Beweis das Untergruppenkriterium 1.