Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 3

(Aufgaben zur Vorbereitung auf das Tutorium in der Woche vom 25.04.-29.04.10)

Aufgaben zu Mengen mit Beispielen aus der Geometrie:

1. Gegeben sind ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M sowie eine Gerade g. Die Gerade g und der Kreis k lassen sich als Punktmengen auffassen.
   Geben Sie in Abhängigkeit von dem Radius r des Kreises k sowie dem Abstand* $d(M,g)$ des Mittelpunktes des Kreises k von der Geraden g Bedingungen dafür an, dass
   - $k_1 \cap g$ die leere Menge ist;
   - $k_1 \cap g$ genau ein Element (d. h. einen Punkt) enthält
     (man sagt dazu auch: Die Menge $k_1 \cap g$ hat die Mächtigkeit 1);
   - $k_1 \cap g$ genau zwei Elemente enthält (die Menge $k_1 \cap k_2$ also die Mächtigkeit 2 hat).

   *Unter dem Abstand $d(P,g)$ eines Punktes P von einer Geraden g versteht man das Minimum der Abstände aller Punkte $X \in g$ von P: $d(P,g) = \min_{X \in g} |PX|$.

2. Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Radien r_1 bzw. r_2 und den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2.
   a) Wie viele Elemente (Punkte) kann die Schnittmenge $k_1 \cap k_2$ der beiden Kreise enthalten?
   b) Geben Sie in Abhängigkeit von den Radien r_1 und r_2 sowie dem Abstand $|M_1M_2|$ der beiden Mittelpunkte Bedingungen dafür an, dass
   - $k_1 \cap k_2$ die leere Menge ist;
   - $k_1 \cap k_2$ genau ein Element enthält (die Menge $k_1 \cap k_2$ also die Mächtigkeit 1 hat);
   - $k_1 \cap k_2$ genau zwei Elemente enthält (die Menge $k_1 \cap k_2$ also die Mächtigkeit 2 hat);
   - $k_1 \cap k_2$ mehr als zwei Elemente enthält (die Mächtigkeit von $k_1 \cap k_2$ größer als 2 ist).

3. $T(n)$ sei die Menge aller Teiler der natürlichen Zahl n. So ist z.B. $T(4) = \{1, 2, 4\}$, denn 1, 2 und 4 sind Teiler von 4. Geben Sie das kartesische $T(10) \times T(6)$ in aufzählender Form an.

4. Kann das kartesische Produkt zweier Mengen A und B aus genau 7 geordneten Paaren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ bestehen?