

Lösung Aufgabe 6.1

Voraussetzung: Es seien eine Gerade g und ein Punkt P , mit P nicht Element von g gegeben

Behauptung: Es existiert **genau** eine Ebene E , mit g gehört zu E und P Element von E

Beweis:

Beweisschritt	Begründung
1) Es gibt mindestens einen Punkt A und einen Punkt B Element von g .	Axiom I/2
2) $\text{nkoll}(A, B, P)$	da P nicht Element von g
3) A, B und P gehören zu genau einer Ebene E	Axiom I/4
4) g gehört zu E	Axiom I/5
5) Es gibt genau eine Ebene, die g und P enthält (Behauptung).	3) und 4)

Lösung Aufgabe 6.2

Voraussetzung: Eine beliebige Ebene E und vier nicht komplanare Punkte A, B, C, D .

- alle vier Punkte können nicht in einer Ebene liegen (nach Voraussetzung)
- die Ebene E kann drei der vier Punkte enthalten (z. B. A, B und C)
- die Ebene E kann zwei der vier Punkte enthalten (z. B. A und B)
- die Ebene E kann einen der vier Punkte enthalten (z. B. A)
- die Ebene E kann keinen der vier Punkt enthalten.

Lösung Aufgabe 6.3

zu 1) Wenn vier Punkte nicht in einer Ebene liegen, dann gibt es keine drei, die auf einer Geraden liegen.

zu 2) Von vier Punkten, die nicht komplanar sind, gibt es keine drei, die kollinear sind.

zu 3):

Voraussetzung: $\text{nkomp}(A, B, C, D)$

Behauptung: Je drei der Punkte A, B, C, D sind nicht kollinear.

Annahme: Es gibt drei kollineare Punkte, oBdA sei $\text{koll}(A, B, C)$ Beweis:

Schritt	Begründung
1) Es gibt eine Gerade g mit $A, B, C \in g$	Annahme
Fall 1: $D \notin g$	
2) Es gibt eine Ebene E mit $A, B, D \in E$	Axiom I/4
3) $C \in E$	(1),(2), Axiom I/5
4) $(A, B, C, D) \in E$	(2),(3)
5) $\text{komp}(A, B, C, D)$	(4)
Widerspruch zur Voraussetzung	
Fall 2: $D \in g$	
6) $\text{koll}(A, B, C, D)$	
7) es gibt einen Punkt F , der nicht auf der Geraden g liegt	Axiom I/3
8) es existiert genau eine Ebene E mit $(A, B, F) \in E$	Axiom I/4
9) mit $A, B \in E$ gilt auch $C, D \in E$	Axiom I/5
10) $\text{komp}(A, B, C, D)$	(9)
Widerspruch zur Voraussetzung	

Annahme ist zu verwerfen! Behauptung stimmt!

Lösung Aufgabe 6.5

Definition: Halbgerade AB^+

$$AB^+ := \{P \mid Zw(A, P, B) \vee Zw(A, B, P)\} \cup \{A, B\}$$

Lösung Aufgabe 6.6

$$AB^- := \{P \mid Zw(P, A, B)\} \cup \{A\}$$

Lösung Aufgabe 6.7

Es sei M ein Punkt der Ebene E . Ein Kreis k , ist die Menge aller Punkte P der Ebene E , die vom Punkt M den selben Abstand haben. Der Punkt M heißt Mittelpunkt des Kreises k .

Lösung Aufgabe 6.8

Nochmal zur Erklärung die Kreisdefinition aus Aufgabe 6.7:

Ein Kreis sei die Menge aller Punkte P_i , die den gleichen Abstand zu Punkt M haben. Diesen Punkt M nennen wir *Mittelpunkt des Kreises*.

Voraussetzung: Alle Punkte P_i und der Punkt M liegen in der selben Ebene E .

- Eine Strecke $\overline{AB}$ ist dann eine Kreissehne eines Kreises k , wenn A und B zu k gehören.
- Eine Strecke $\overline{MB}$ ist dann ein Kreismittelpunkt eines Kreises k , wenn B zu k gehört.
- Eine Strecke $\overline{AB}$ ist dann ein Kreisdurchmesser eines Kreises k , wenn A und B zu k gehören und $\overline{AB}$ durch den Mittelpunkt M geht.

Lösung Aufgabe 6.9

Satz in wenn-dann:

Wenn drei Punkte A, B und C kollinear sind, dann liegt genau einer zwischen den beiden anderen Punkten.

Beweis: Es seien also A, B und C drei Punkte.

Voraussetzungen: koll(A, B und C)

Behauptung: es gilt genau eine der drei möglichen Zwischenrelationen: $zw\{A, B, C\}$ oder $zw\{A, C, B\}$ oder $zw\{B, A, C\}$

Beweis		
Nr.	Beweisschritt	Begründung
(I)	koll $\{A, B, C\}$	Voraussetzung
(II)	es gilt eine der drei Gleichungen: $ AB + BC = AC $ $ AC + CB = AB $ $ BA + AC = BC $	(I), Axiom II/3
(III)	$zw\{A, B, C\}$ oder $zw\{A, C, B\}$ oder $zw\{B, A, C\}$	(II), Def (Zwischenrelation)
(IV)	zu zeigen: es liegt genau einer zwischen den beiden anderen Annahme: es gilt o.B.d.A. $zw\{A, B, C\}$ und $zw\{A, C, B\}$	
(V)	$ AB + BC = AC $ $ AC + CB = AB $	(IV), (Axiom II/3)

(VI)	$ AB + BC = AC $ $ AB - CB = AC $	rechnen mit reellen Zahlen, (Axiom II/2)
(VII)	$ AB + BC = AB - BC $	(VI gleichgesetzt), rechnen mit reellen Zahlen
(VIII)	$ AB + 2 BC = AB $	(VII), + $ BC $
(IX)	$2 BC = 0$	(VIII), - $ AB $
(X)	Widerspruch, da die beiden Punkte B und C identisch sein müssten, nach Voraussetzung aber drei verschiedene Punkte A, B und C gegeben sind. --> Annahme zu verwerfen, Behauptung stimmt.	

Lösung Aufgabe 6.10

Teilaufgabe 1

Die Formulierung "eine und nur eine" ist äquivalent zu "genau eine":

Die Kreise k_1 und k_2 haben **genau** dann **genau** einen Punkt S gemeinsam, wenn $|M_1M_2| = |r_1| + |r_2|$ gilt.

Teilaufgabe 2

allgemeiner Teil für beide Implikationen

Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 und den Radien r_1 bzw. r_2 .

Implikation I (→)

Wenn $|M_1M_2| = |r_1| + |r_2|$, dann haben die beiden Kreise k_1 und k_2 genau einen Punkt gemeinsam.

andere möglich Formulierung (neben vielen weiteren, die hier nicht alle aufgezeigt werden sollen und können):

Wenn für zwei Kreise gilt, dass die Summe der Längen ihrer Radien gleich dem Abstand ihrer Mittelpunkte ist, dann existiert genau ein Punkt S , den die beiden Kreise gemeinsam haben.

(Der allgemein Teil zuvor ist hier mit aufgenommen und hätte nicht extra formuliert werden müssen.)

Implikation II (←)

Wenn k_1 und k_2 genau einen Punkt gemeinsam haben, so gilt $|M_1M_2| = |r_1| + |r_2|$.

Teilaufgabe 3

Beweis von Implikation I

Voraussetzung

$$|M_1M_2| = |r_1| + |r_2|$$

Behauptung 1 (Existenzaussage)

Es gibt einen Punkt S , der sowohl zu k_1 als auch zu k_2 gehört.

Behauptung 2 (Eindeutigkeitsaussage)

Es gibt nicht mehr als einen Punkt S den k_1 und k_2 gemeinsam haben.

Beweis der Existenzaussage (Behauptung 1)

Nachzuweisen ist die Existenz eines Punktes S der sowohl zu k_1 als auch zu k_2 gehört.

Der Kreis k_1 ist die Menge aller Punkte unserer Ebene, die zu dem Punkt M_1 den Abstand $|r_1|$ haben.

Der Kreis k_2 ist die Menge aller Punkte unserer Ebene, die zu dem Punkt M_2 den Abstand $|r_2|$ haben.

Wir haben also die Existenz eines Punktes S nachzuweisen, für den gilt:

$$|SM_1| = |r_1|$$

und

$$|SM_2| = |r_2|$$

Wir konstruieren uns einen solchen Punkt S wie folgt:

Wir gehen von dem Strahl $M_1M_2^+$ aus.



Auf $M_1M_2^+$ gibt es nach dem Axiom vom Lineal genau einen Punkt S , der zu M_1 den Abstand $|r_1|$ hat: $|M_1S| = |r_1|$



Jetzt gilt: (*) Der Punkt S liegt zwischen den Punkten M_1 und M_2

Begründung von (*):

Der Punkt S fällt nicht mit M_1 zusammen: $|r_1| = 0$, entarteter Kreis.

Der Punkt S fällt nicht mit M_2 zusammen: entsprechend der Voraussetzung würde jetzt k_2 entarten.

Annahme: $\neg \text{Zw}(M_1, S, M_2)$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass S ein Punkt der Halbgeraden $M_1M_2^+$ ist, kann jetzt nur noch $\text{Zw}(M_1, M_2, S)$ gelten:



$\text{Zw}(M_1, M_2, S)$ bedeutet: (**) $|M_1M_2| + |M_2S| = |M_1S|$

Der Punkt S wurde so gewählt, dass sein Abstand zu M_1 die Zahl $|r_1|$ ist, womit (**) auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$(***) |M_1 M_2| + |M_2 S| = |r_1|$$

Unter Berücksichtigung der Voraussetzung $|M_1 M_2| = |r_1| + |r_2|$ gilt entsprechend (***) auch (***)

$$|r_1| + |r_2| + |M_2 S| = |r_1|$$

Da nun $|r_1|, |r_2|$ und $|M_2 S|$ positive reelle Zahlen sind, ist (****) ein Widerspruch in sich. Die Annahme $\neg \text{Zw}(M_1, S, M_2)$

ist zu verwerfen.

Nach diesen Ausführungen können wir also davon ausgehen, dass der von uns konstruierte Punkt S zwischen den Punkten M_1 und M_2 liegt. Aus $\text{Zw}(M_1, S, M_2)$ folgt:

$$(i) |M_1 S| + |S M_2| = |M_1 M_2|$$

Unter Berücksichtigung der Voraussetzung $|r_1| + |r_2| = |M_1 M_2|$ lässt sich (i) als

$$(ii) |M_1 S| + |S M_2| = |r_1| + |r_2|$$

schreiben.

Da S so gewählt wurde, dass $|M_1 S| = |r_1|$ gilt, ist auch

$$(iii) |r_1| + |S M_2| = |r_1| + |r_2|$$

gültig.

Aus (iii) folgt unmittelbar $|S M_2| = |r_2|$.

Damit gehört der Punkt S sowohl zu k_1 als auch zu k_2 .

Die Existenz des gemeinsamen Punktes S der beiden Kreise k_1 und k_2 ist damit nachgewiesen.

Beweis der Eindeutigkeitsaussage (Behauptung 2)

Annahme: $\exists T : T \neq S \wedge |T M_1| = |r_1| \wedge |T M_2| = |r_2|$

Wegen $|r_1| + |r_2| = |M_1 M_2|$ und $|T M_1| = |r_1|$ und $|T M_2| = |r_2|$ gilt:

$$\text{Zw}(M_1, T, M_2)$$

und damit natürlich auch

$$T \in M_1 M_2^+$$

Damit sind S und T zwei verschiedene Punkte auf dem Strahl $M_1 M_2^+$ die zum Anfangspunkt dieses Strahls ein und denselben Abstand $|r_1|$ haben.

Das wäre allerdings ein Widerspruch zur Eindeutigkeitsaussage des Axioms vom Lineal.

Beweis der Implikation II

muss noch geschrieben werden, allein mir fehlt momentan die Zeit, in der nächsten freien Minute (eher Stunde) werde ich das Schreiben der Lösung fortsetzen.--*m.g.* 13:17, 21. Jun. 2010 (UTC)