

6 Übungsaufgaben zyklische Gruppen und Isomorphie

Aufgabe 6.1

Potenz eines Gruppenelementes

- a) Berechnen Sie $\bar{5}^5$ in $[\mathbb{Z}/_6, \oplus]$.
- b) Berechnen Sie $\bar{5}^5$ in $[\mathbb{Z}/_7, \odot]$.
- c) Berechnen Sie die dritte Potenz von $y(x) = \frac{3}{4}x + 1$ in der Gruppe der linearen Funktionen bzgl. der NAF von Funktionen.
- d) Berechnen Sie die dritte Potenz von $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Matrixmultiplikation
- e) Es sei $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie M^{-1} und M^{-2} jeweils bzgl. der Matrixmultiplikation.
- f) Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{a}^{100}$, $\vec{a}^{-1}$, $\vec{a}^{-100}$ bzgl. der Addition in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 6.2

Potenzgesetze in Gruppen

Beweisen Sie:

Satz 6.1

Es sei $[G, \otimes]$ eine Gruppe.
 $\forall a \in G, \forall m, n \in \mathbb{N} : a^n \otimes a^m = a^{n+m}$.

Aufgabe 6.3

Potenz des Inversen

Beweisen Sie:

Satz 6.2

Es sei $[G, \otimes]$ eine Gruppe.
 $\forall a \in G, \forall z \in \mathbb{Z}, z > 0 : a^{-z} = (a^{-1})^z$.

Aufgabe 6.4

zyklisch heißt abelsch

Beweisen Sie :

Satz 6.3

Jede zyklische Gruppe ist kommutativ.

Aufgabe 6.5

zwei isomorphe Gruppen

Beweisen Sie, dass $[\mathbb{Z}/6, \oplus]$ und $[\mathbb{Z}/7, \odot]$ isomorph zueinander sind.

Aufgabe 6.6

Eigenschaften von Isomorphismen

Es sei φ ein Isomorphismus von $[G_1, \oplus]$ auf $[G_2, \otimes]$. Beweisen Sie:

- a) Wenn e_1 das Einselement in $[G_1, \oplus]$ ist und e_2 das Einselement in $[G_2, \otimes]$ ist, dann ist $\varphi(e_1) = e_2$.*
- b) $\forall a \in G_1 : \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$*