

3 Übungsaufgaben Serie III

Aufgabe 3.1

Ein Beweis aus der Zahlentheorie

Satz 3.1

Es gelte $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Wenn m_1 und m_2 bei Division durch a denselben Rest r_m und n_1 und n_2 bei Division durch a denselben Rest r_n lassen, dann lassen $m_1 + n_1$ und $m_2 + n_2$ auch denselben Rest bei Division durch a .

- a) *Illustrieren Sie den Satz mittels selbst gewählter Beispiele.*
- b) *Beweisen Sie den Satz für $a = 4$.*
- c) *Beweisen Sie den Satz für beliebige a .*

Aufgabe 3.2

geometrisches Verständnis, Vierecke

- a) *Ein Quadrat hat vier Achsensymmetrien. Benennen Sie diese.*
- b) *Es gibt vier Drehungen, die ein Quadrat jeweils auf sich selbst abbilden. Benennen Sie diese.*
- c) *Zählen Sie alle Viereckstypen auf, die*
 - (a) *zwei Drehsymmetrien und gleichzeitig zwei Achsensymmetrien haben,*
 - (b) *nur Achsensymmetrien haben,*
 - (c) *nur Drehsymmetrien haben,*
 - (d) *die genau eine Achsensymmetrie haben,*
 - (e) *die genau zwei Achsensymmetrien haben,*
 - (f) *deren Repräsentanten alle ähnlich zueinander sind.*
- d) *Definieren Sie den Begriff Schiefdrachen.*
- e) *Definieren Sie den Begriff Drachen.*
- f) *Definieren Sie den Begriff Raute unter Verwendung eines unmittelbaren Oberbegriffs.*
- g) *Zeichnen Sie ein Haus der Vierecke unter dem Gesichtspunkt von Symmetrien.*

Aufgabe 3.3

Mittelsenkrechte

- a) *Definieren Sie den Begriff Mittelsenkrechte entsprechend der Namenssemantik.*
- b) *Auf dem Weg zum Mittelsenkrechtenkriterium:*

Satz 3.2

Halbes Mittelsenkrechtenkriterium

Es sei m die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$.

$\forall P \in m : \overline{PA} \cong \overline{PB}$.

Formulieren Sie Satz 3.2 in „Wenn Dann“ ohne die Verwendung von mathematischer Formelsprache.

- c) Formulieren Sie Satz 3.2 ohne Allquantor in mathematischer Formelsprache.
- d) Beweisen Sie Satz 3.2.
- e) Der Satz 3.3 sei die Umkehrung von Satz 3.2. Formulieren Sie Satz 3.3.
- f) Auch die Umkehrung von Satz 3.2 ist wahr. Formulieren Sie die entsprechende Äquivalenz als das sogenannte Mittelsenkrechtenkriterium.
- g) Es sei $a \Rightarrow b$ eine Implikation. Unter der Kontraposition dieser Implikation versteht man die Implikation $\neg b \Rightarrow \neg a$. Formulieren Sie die Kontraposition von Satz 3.2.
- h) Begründen Sie in der ebenen Geometrie: Es seien k_1, k_2, k_3 drei Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 . Wenn der Schnitt aller drei Kreise genau zwei Punkte beinhaltet, dann sind M_1, M_2, M_3 kollinear. (Googeln Sie ggf. kollinear.)

Aufgabe 3.4

Drachenviereck

- a) Definieren Sie den Begriff Drachenviereck über die Diagonaleigenschaft.
- b) Es sei $\overline{ABCD}$ ein Viereck mit $\overline{AB} \cong \overline{AD} \wedge \overline{CB} \cong \overline{CD}$. Beweisen Sie, dass $\overline{ABCD}$ ein Drachen ist.
- c) Definieren Sie Rauten als spezielle Drachen.

Aufgabe 3.5

ein wenig Aussagenlogik: and, or, xor bzw. $\wedge, \vee, \veebar$

Es seien a und b zwei Aussagen. Ergänzen Sie die folgenden Wahrheitswerttabellen:

- a) logisches und ($\wedge$)

a	b	$a \wedge b$
falsch	falsch	
falsch	wahr	
wahr	falsch	
wahr	wahr	

- b) logisches oder ($\vee$)

a	b	$a \vee b$
falsch	falsch	
falsch	wahr	
wahr	falsch	
wahr	wahr	

c) exklusives oder ($\underline{\vee}$)

a	b	$a \underline{\vee} b$
falsch	falsch	
falsch	wahr	
wahr	falsch	
wahr	wahr	

d) Die logischen Verknüpfungen lassen sich durch elektronische Schaltungen realisieren. In diesem Kontext verwendet man für das exklusive oder auch das Zeichen $\oplus$ und nennt die Schaltung einen Halbaddierer. Recherchieren Sie und erläutern Sie den Zusammenhang.

Aufgabe 3.6

Ein wenig Didaktik

Um ein grundlegendes Verständnis für einen Begriff zu vermitteln, arbeitet man im Mathematikunterricht mit vielen Beispielen und Gegenbeispielen. Für den Begriff „Mittelsenkrechte“ müssen prinzipiell zwei Bedingungen erfüllt sein: Die Gerade muss senkrecht auf der Strecke stehen ($\perp$) und diese halbieren ($\frac{1}{2}$). Dann und nur dann, wenn die Verknüpfung $\perp \wedge \frac{1}{2}$ wahr ist, darf die entsprechende Gerade Mittelsenkrechte der jeweiligen Strecke genannt werden. Aus diesem „und-Konstrukt“ lässt sich eine grundlegende Klassifizierung von Gegenbeispielen bezüglich einer didaktisch wertvollen schulischen Errarbeitung des Begriffs Mittelsenkrechte ableiten. Beschreiben Sie diese Klassifizierung.