Aufgabe 10.1

Ihre Schüler sollen aus unterschiedlich langen Holzstäbchen Vierecke legen. Sie stellen folgende Aufgabe:
Lege Vierecke, bei denen gegenüberliegende Seiten jeweils gleichlang sind.

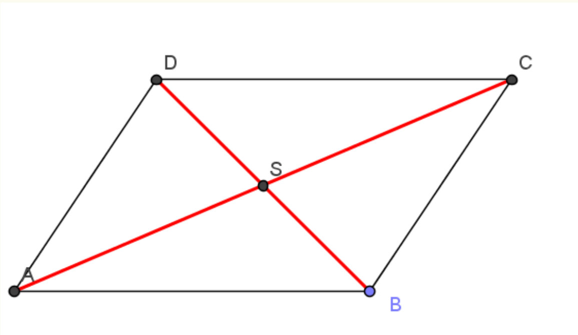
a) Um welche Vierecksart wird es sich immer handeln? Definieren Sie diese Vierecksart so, wie sie sich aufgrund der Tätigkeit der Schüler ergibt. Verwenden Sie als Oberbegriff den Begriff Viereck.
Es entstehen immer Parallelogramme.

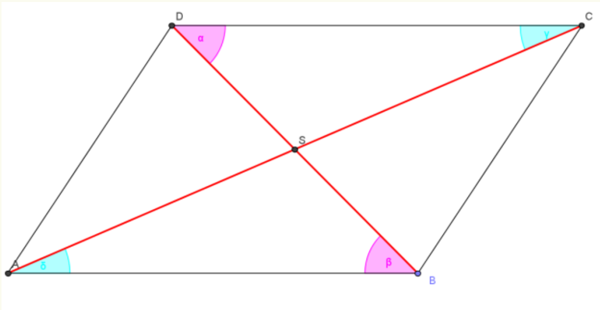
Definition (Parallelogramm):

- Ein Viereck, bei dem die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang sind, heißt Parallelogramm.
- Du sollst mit Holzstäbchen ein Viereck legen. Wähle dazu die Holzstäbchen so, dass die jeweils gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind. Du erhältst ein Parallelogramm.

b) Beweisen Sie für die in a) definierte Vierecksart:
Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, halbieren sich seine Diagonalen.

Voraussetzung: Parallelogramm ABCD, gegenüberliegende Seiten sind jeweils gleich lang
Behauptung: Strecke AC ∩ Strecke BD = {S} und |AS| = |SC| und |BS| = |SD|





Zunächst noch die Anmerkung, dass wir wissen, dass es diesen Schnittpunkt gibt: Das Parallelogramm ABCD ist ein konvexes Viereck – konvexe Vierecke sind derart definiert, dass sich die Diagonalen schneiden. Punkt S existiert also.

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	$\overline{AD} \cong \overline{BC}, \overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{AC} \cong \overline{AC}, \overline{BD} \cong \overline{BD}$	$\overline{ABCD}$ ist Parallelogramm (Definition s. o.), trivial
2)	$\overline{ABD} \cong \overline{BCD}$	(1), SSS
3)	$\angle CAB \cong \angle ACD, \angle ABD \cong \angle BDC$	(2), Definition Kongruenz
4)	$\overline{ASB} \cong \overline{CSD}$	(1), (2), WSW
5)	$\overline{AS} \cong \overline{CS}, \overline{DS} \cong \overline{BS}$	(4)

Hinweis: Sie dürfen jetzt für diese Vierecksart nur die Eigenschaften verwenden, die Sie in a) in der Definition angegeben haben.

Aufgabe 10.2

Definieren Sie den Begriff des gleichschenkligen Dreiecks. Bringen Sie in der Definition die Begriffe Basis, Basiswinkel und Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks unter.
Hinweis: Die Schenkel eine Winkels sind Strahlen. Die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind Strecken.
Wir verwenden die schulüblichen Bezeichnungen für Winkel und Seiten.
Sei ABC ein Dreieck. Wenn die Seiten a und b kongruent zueinander sind, dann ist das Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck. Die Seiten a und b werden Schenkel und die Seite c Basis des gleichschenkligen Dreiecks ABC genannt. Die Winkel α und β sind Basiswinkel des gl. Dreiecks ABC.

Oder etwas abstrakter:
Ein Dreieck, bei dem zwei Seiten kongruent zueinander sind, nennt man gleichschenkliges Dreieck. Die zueinander kongruenten Seiten nennt man Schenkel, die dritte Seite nennt man Basis des gleichschenkligen Dreiecks. Diejenigen Winkel, bei denen die Basis eine Teilmenge der Schenkel ist, nennt man Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks.

Aufgabe 10.3

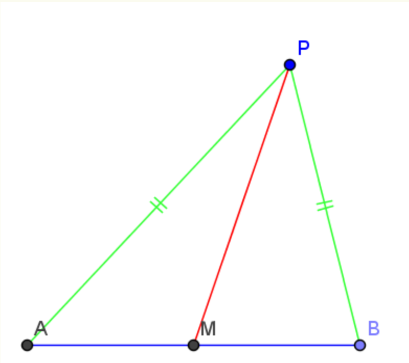
Beweisen Sie Satz VII.6 a:

Wenn ein Punkt P zu den Endpunkten der Strecke $\overline{AB}$ jeweils ein und denselben Abstand hat, so ist er ein Punkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.

Voraussetzung: |PA| = |PB|, $\overline{AB}$
Behauptung: P $\in$ der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$

Fall 1) P ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$: trivial
Fall 2) P ist nicht Mittelpunkt von $\overline{AB}$

Gilt zu zeigen: PM steht senkrecht auf $\overline{AB}$



Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	|AP| = |BP|	VSS
2)	|MP| ist kongruent zu sich selbst	Trivial
3)	|AM| = |MB|	Definition Mittelpunkt
4)	Dreieck AMP ist kongruent Dreieck MBP	(1), (2), (3), SSS
5)	|<AMP| = |< PMB| und sind Nebenwinkel	(4), Definition Kongruenz, Definition Nebenwinkel
6)	|<AMP| und |< PMB| sind rechte Winkel	(5), Definition rechter Winkel
7)	MP steht senkrecht auf $\overline{AB}$	(6), Definition senkrecht
8)	P $\in$ der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$	(7), Definition Mittelsenkrechte

Aufgabe 10.4

Beweisen Sie Satz VII.6 b

Wenn ein Punkt P zur Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ gehört, dann hat er zu den Punkten A und B ein und denselben Abstand.

Voraussetzung: : P $\in$ der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$
Behauptung: |PA| = |PB|

Fall 1) P ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$: trivial
Fall 2) P ist nicht Mittelpunkt von $\overline{AB}$

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	|PM| = |PM|	Trivial
2)	|AM| = |MB|	Definition MS (geht durch den Mittelpunkt), Definition Mittelpunkt
3)	|< AMP| = |<PMB|	Definition Mittelsenkrechte, senkrecht, rechter Winkel, Nebenwinkel
4)	Dreieck AMP ist kongruent zu Dreieck PMB	(1), (2), (3), SWS
5)	|PA| = |PB|	(4), Definition Kongruenz

Aufgabe 10.5

Begründen Sie, warum mittels der Sätze Satz VII.6 a und Satz VII.6 b der Satz VII.6 bewiesen wurde.
Satz VII. 6 (Ein Punkt P gehört genau dann zur Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$, wenn er zu den Endpunkten der Strecke $\overline{AB}$ jeweils ein und denselben Abstand hat) ist das Kriterium, das aus den Sätzen VII. 6 a und b gebildet werden kann – Satz VII. 6 a ist ‚Hinrichtung' und Satz VII. 6 b ist Rückrichtung dieses Kriteriums.

Aufgabe 10.6

Erläutern Sie, wie und warum sich aus den Satz VII.6 eine neue Möglichkeit, der Definition des Begriffs der Mittelsenkrechte ergibt.
Ein Kriterium kann verwendet werden, um einen Begriff zu definieren, da beide Bedingungen jeweils notwendig, wie hinreichend sind und den Begriff zu erhalten. In diesem Falle, kann die vorherig gültige Definition als Kriterium bewiesen werden.
Definition (Mittelsenkrechte): Die Menge aller Punkte P, für die gilt, dass sie zu den Endpunkten der Strecke $\overline{AB}$ jeweils ein und denselben Abstand haben, nennt man Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.