Einführung in die Geometrie: Übungsserie 3

(Aufgaben zur Vorbereitung auf die Übungen in der Woche vom 03.05.-07.05.10)

1. Aufgabe:

Der Basiswinkelsatz lautet: Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent zueinander.

a) Wie lautet die Umkehrung des Basiswinkelsatzes?
b) Fassen Sie den Basiswinkelsatz und seine Umkehrung zu **einem** Satz zusammen (Kriterium).

2. Aufgabe:

Der Begriff *Mittelsenkrechte* sei folgendermaßen definiert:

> Die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ ist die Gerade g, die durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ verläuft und zu der Geraden AB senkrecht ist.

Beweisen Sie folgenden Satz:

> Die Mittelsenkrechte m einer beliebigen Strecke $\overline{AB}$ ist die Menge aller Punkte P, die von A und B denselben Abstand haben: $m = \left\{ P \,\middle|\, |AP| = |BP| \right\}$.
>
> Beachten Sie, dass Sie die Gleichheit zweier Mengen nachweisen müssen (der Beweis besteht aus 2 Teilen).

3. Aufgabe:

Geben Sie das kartesische Produkt $M \times M$ der Menge $M = \{1,2,3\}$ an.

4. Aufgabe:

Geben Sie die Kleiner-Gleich-Relation „$\leq$“ in der Menge $M = \{1,2,3\}$ als Teilmenge des kartesischen Produktes $M \times M$ an und stellen Sie diese Relation in einer Tabelle dar.

5. Aufgabe:

Entscheiden Sie für die folgenden Relationen, ob es sich um reflexive, symmetrische sowie transitive Relationen handelt:

- Parallelität von Geraden der Ebene,
- Kongruenz geometrischer Figuren,
- Teilbarkeit in **N**,
- Kleinerrelation in **R**,
- Größer-Gleich-Relation in **R**,
- Ungleichheit in **R.**

Relation	reflexiv	symmetrisch	transitiv
Parallelität			
Kongruenz			
Teilbarkeit			
$<$			
$\geq$			
$\neq$			

6. Aufgabe:

Es seien eine Ebene *E* (aufgefasst als Punktmenge) und eine Gerade *g* in *E* gegeben.

Wir betrachten folgende Relation ◊ (◊ ist ein willkürlich gewähltes Symbol, um die Relation nicht mit dem unauffälligen Buchstaben *R* bezeichnen zu müssen) in der Menge *E**g* (also aller Punkte der Ebene *E*, die nicht der Geraden *g* angehören):

Für beliebige $A, B \in E\backslash g$ gilt A ◊ B $:\Leftrightarrow \ \overline{AB} \cap g = \{\}$.

Bemerkung: Falls $A = B$, so verstehen wir unter der „Strecke" $\overline{AB} = \overline{AA}$ einfach den Punkt *A*.

a) Beschreiben Sie die Relation ◊ verbal und veranschaulichen Sie diese Relation.

b) Begründen Sie anschaulich, dass ◊ eine Äquivalenzrelation ist. Formulieren Sie dazu die Eigenschaften von Äquivalenzrelationen konkret auf die Relation ◊ bezogen (also als Aussagen über Schnittpunkte von Strecken und Geraden.
Hinweis: Sie können die Transitivität noch nicht exakt beweisen; in dieser Aufgabe geht es zunächst darum, die Relationseigenschaften als geometrische Eigenschaften zu interpretieren und zu verstehen. Der Beweis der Transitivität ist erst auf Basis einer axiomatischen Fundierung der Geometrie möglich.

c) Geben Sie die Äquivalenzklassen an, in welche ◊ die Menge *E**g* zerlegt.