

Aufgabe G.1: Definitionen, Begriffsbildungen

a) Es sei M eine Menge von Punkten. Definieren Sie „ M ist konvex“. (2 Punkte)

(erreichte Punkte:)

b) Definieren Sie den Begriff *Außenwinkel eines Dreiecks*. (2 Punkte)

(erreichte Punkte:)

c) Definition: (Z-Punkt)

Es gelte $\text{nkoll}(A, B, C)$. Wenn $\text{komp}(A, B, C, Z) \wedge \overline{AZ} \cong \overline{BZ} \wedge |ZC| = |ZA|$, dann heißt Z der Z -Punkt von \overline{ABC} .

Was ist ein Z -Punkt? (2 Punkte)

(erreichte Punkte:)

d) Definieren Sie den Begriff gleichschenkliges Trapez mit den Mitteln die die Vorlesung zur Verfügung gestellt hat. (2 Punkte)

(erreichte Punkte:)

Name:

Vorname:

WS 15/16

Matrikelnr.:

12.02.16

Geometrie

Aufgabe G.2: Argumentieren, Begründen, Beweisen

- a) Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M . Ferner sei \overline{AB} ein Durchmesser von k . Das Dreieck \overline{ABC} habe einen rechten Innenwinkel bei C . Wir nehmen an, dass $C \notin k$ gilt. Lena will zeigen, dass unsere Annahme falsch ist. Nennen Sie den entscheidenden Satz, den Lena für ihre Beweisführung nutzen wird. (1 Punkt)

(erreichte Punkte:)

- b) Es gelte $\text{nkoll}(A, B, C) \wedge A \neq B$. Beweisen Sie $B \neq C$. (3 Punkte)

(erreichte Punkte:)

- c) Beweisen Sie, dass das Innere eines Dreiecks konvex ist. (3 Punkte)

(erreichte Punkte:)

Name:

Vorname:

WS 15/16

Matrikelnr.:

12.02.16

Geometrie

Aufgabe G.3: Vierecke

G.3.1 \Rightarrow

Satz K42: Wenn ein Trapez einen Umkreis hat, dann ist es gleichschenkelig.

a) Fertigen Sie eine Skizze zu Satz K42 an. (1 Punkt)

(erreichte Punkte:)

b) Formulieren Sie die Voraussetzung(en) und die Behauptung von Satz K42 unter Verwendung der Bezeichnungen in Ihrer Skizze. (3 Punkte)

(erreichte Punkte:)

c) Beweisen Sie Satz K42 auf der Rückseite dieses Blattes. (6 Punkte)

(erreichte Punkte:)

Name:

Vorname:

WS 15/16

Matrikelnr.:

12.02.16

Geometrie

G.3.2 \Leftarrow

Satz K24: Wenn ein Trapez gleichschenkelig ist, dann ist es ein Sehnenviereck.

a) Fertigen Sie eine Skizze zu Satz K24 an. (1 Punkt)

(erreichte Punkte:)

b) Formulieren Sie die Voraussetzung(en) und die Behauptung von Satz K24 unter Verwendung der Bezeichnungen in Ihrer Skizze. (3 Punkte)

(erreichte Punkte:)

c) Beweisen Sie Satz K24 auf der Rückseite dieses Blattes. (6 Punkte)

(erreichte Punkte:)

d) Fassen Sie K42 und K24 zu einem Satz zusammen. (1 Punkt)

(erreichte Punkte:)

Aufgabe G.4: Beweisen wie die Schüler

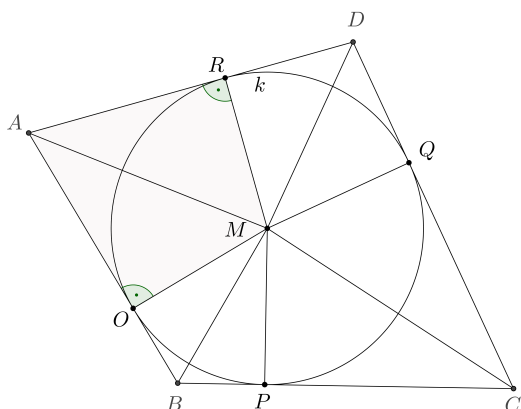


Abbildung 1

Es seien \overline{ABCD} ein Viereck und k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M . Die Punkte O, P, Q, R seien die Berührungspunkte der Tangenten AB, BC, CD, DA an k (s. Abbildung 1). Mark behauptet $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$ und hinterlässt das folgende Beweisfragment. Ergänzen Sie den Beweis von Mark.

Beweis

Nr.	Schritt	Begründung	Pkt.	
(1)	$\overline{OM} \cong \overline{PM} \cong \overline{QM} \cong \overline{RM}$		1	
(2)	$ \angle AOM = \angle ARM = 90^\circ$		1	
(3)	$\overline{AM} \cong \overline{AM}$		1	
(4)	$ RM = OM < AM $		3	
(5)	$\overline{AMO} \cong \overline{AMR}$		5	
(6)	$\overline{AO} \cong \overline{AR}$		2	
(7)	$\overline{BO} \cong \overline{BP} \wedge \overline{CP} \cong \overline{CQ} \wedge \overline{DQ} \cong \overline{DR}$		1	
(8)	$ AB + CD = BC + AD $		2	

Formulieren Sie die Aussage, die Mark bewiesen hat, als allgemeinen Satz. (2 Punkte)

(erreichte Punkte:)

Name:

Vorname:

Matrikelnr.:

WS 15/16

12.02.16

Geometrie

Platz für weitere Ausführungen

Die Axiome der Euklidischen Geometrie

Inzidenzaxiome

Axiom I.0

Geraden und Ebenen sind Punktmenge.

Axiom I.1 (Axiom von der Geraden)

Zu zwei beliebigen verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die die beiden Punkte enthält.

Axiom I.2

Zu jeder Geraden gibt es (wenigstens) zwei verschiedene Punkte, die dieser Geraden angehören.

Axiom I.3

Es gibt wenigstens 3 paarweise verschiedene Punkte, die nicht kollinear sind.

Axiom I.4

Zu je drei nichtkollinearen Punkten gibt es genau eine Ebene, die diese drei Punkte enthält. Jede Ebene enthält (wenigstens) einen Punkt.

Axiom I.5

Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene E liegen, so gehört g zu E .

Axiom I.6

Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie noch mindestens einen weiteren Punkt gemeinsam. **Axiom I.7**

Es gibt vier paarweise verschiedene Punkte, die nicht komplanar sind.

Abstandsaxiome

Axiom II.1 (Abstandsaxiom)

Zu je zwei Punkten A und B gibt es eine eindeutig bestimmte nicht negative reelle Zahl d mit $d = 0 \Leftrightarrow A = B$.

Axiom II.2

Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB| = |BA|$.

Axiom II/3 (Dreiecksungleichung)

Für drei beliebige Punkte A, B und C gilt $|AB| + |BC| \geq |AC|$.

Falls koll(ABC), dann ist eine der folgenden Gleichungen erfüllt

$$\begin{aligned} |AB| + |BC| &= |AC| \\ |AC| + |CB| &= |AB| \\ |BA| + |AC| &= |BC| \end{aligned}$$

Ist umgekehrt eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so sind A , B und C kollinear.

Axiome der Anordnung

Axiom III.1 (Axiom vom Lineal)

Zu jeder nicht negativen reellen Zahl d gibt es auf jedem Strahl p genau einen Punkt, der zum Anfangspunkt von p den Abstand d hat.

Axiom III.2 (Das Axiom von Pasch)

Gegeben sei ein Dreieck \overline{ABC} . Ferner sei g eine Gerade, die durch keinen der drei Eckpunkte A, B, C geht. Wenn g eine der drei Seiten des Dreiecks \overline{ABC} schneidet, dann schneidet g genau eine weitere Seite des Dreiecks \overline{ABC} .

Axiome der Winkelmessung

Axiom IV.1 (Winkelmaßaxiom)

Zu jedem Winkel α gibt es genau eine reelle Zahl ω zwischen 0 und 180.

Axiom IV.2 (Winkelkonstruktionsaxiom)

Es sei $g \equiv SA$ eine Gerade in der Ebene E . Zu jeder reellen Zahl ω mit $0 < \omega < 180$ gibt es in jeder der beiden durch g bestimmten Halbebenen der Ebene E genau einen Strahl SB^+ mit $|\omega| = |\angle ASB|$

Axiom IV.3 (Winkeladditionsaxiom)

Wenn der Punkt P zum Inneren des Winkels $\angle ASB$ gehört, dann gilt $|\angle ASP| + |\angle PSB| = |\angle ASB|$.

Axiom IV.4 (Supplementaxiom)

Nebenwinkel sind supplementär.

Das Kongruenzaxiom

Axiom V (Kongruenzaxiom SWS)

Wenn für zwei Dreiecke \overline{ABC} und \overline{DEF} die folgenden 3 Kongruenzen

$$\begin{aligned}\overline{AB} &\cong \overline{DE} \\ \overline{AC} &\cong \overline{DF} \\ \angle CAB &\cong \angle FDE\end{aligned}$$

gelten,

dann sind die beiden Dreiecke \overline{ABC} und \overline{DEF} kongruent zueinander.

Euklidisches Parallelenaxiom

Axiom EP

Zu jedem Punkt P außerhalb einer Geraden g gibt es höchstens eine Gerade h , die durch P geht und zu g parallel ist.