

## Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 10

(Lösungen)

1. Unter einem Dreieck versteht man die Vereinigungsmenge von drei besonderen Strecken (umgangssprachlich: Das Dreieck ist sein Rand.). Definieren Sie den Begriff Dreieck  $\overline{ABC}$ .

**Definition (Dreieck):**

Es seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  drei nicht kollineare Punkte. Die Vereinigungsmenge der Strecken  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  und  $\overline{AC}$  heißt Dreieck  $\overline{ABC}$ .

2. Definieren Sie mittels des Schnitts geeigneter Halbebenen den Begriff des Inneren eines Dreiecks  $\overline{ABC}$ .

**Definition (Inneres eines Dreiecks):**

Das Innere eines Dreiecks  $\overline{ABC}$  ist die Schnittmenge der drei Halbebenen  $ABC^+$ ,  $BCA^+$  und  $ACB^+$ . Kurzschreibweise:  
 $I(\overline{ABC}) := \overline{ABC^+} \cap \overline{BCA^+} \cap \overline{ACB^+}$

3. Beweisen Sie: Halbebenen sind konvexe Punktmenge.

**Lösung:**

Wir zeigen zunächst: Offene Halbebenen sind konvexe Punktmenge.

Voraussetzung: offene Halbebene  $gP^+$

Behauptung:  $gP^+$  ist konvex

Beweis:

Nr.	Beweisschritt	Begründung
1	$Q$ sei ein beliebiger weiterer Punkt, der mit $P$ in der offenen Halbebene $gP^+$ liegt.	
2	Es gilt: $\overline{QP} \cap g = \{P\}$	Def. Halbebene
3	$\forall R \in \overline{QP} : \overline{RP} \cap g = \{P\}$	2
4	Alle Punkte auf der Strecke $\overline{QP}$ gehören zur offenen Halbebene $gP^+$	3
5	$gP^+$ ist konvex	4

Erweiterung auf Halbebenen:

Es müssen zusätzlich noch zwei weitere Fälle betrachtet werden:

- Zwei Punkte  $A$  und  $B$  der Punktmenge liegen auf der Trägergeraden  $g$
- Ein Punkt  $A$  liegt auf der Trägergeraden  $g$  und ein Punkt  $B$  liegt in der offenen Halbebene  $gP^+$

zu a)  $\overline{AB}$  liegt vollständig in  $g$  und gehört somit zur Halbebene  $gP^+$

zu b) wir teilen  $\overline{AB}$  in die Strecke  $\overline{AB} \setminus A$  und dem Punkt  $A$  auf.  $\overline{AB} \setminus A$  hat keinen Schnittpunkt mit  $g$  und  $A$  gehört zu  $g$  und damit ebenfalls zur Halbebene  $gP^+$

4. Entwickeln Sie ein Kriterium dafür, dass ein Viereck konvex ist, indem Sie mit Halbebenen argumentieren.

LÖSUNG:

Ein Viereck  $A_1A_2A_3A_4$  ist genau dann konvex, falls für zwei beliebige benachbarte Punkte  $A_iA_{i+1}$  ( $i=1\dots 4$ ; für  $i=4$  wird  $i+1=1 \equiv 5 \pmod{4}$  gesetzt) die beiden jeweils anderen Punkte in derselben Halbebene bezüglich  $A_iA_{i+1}$  liegen.

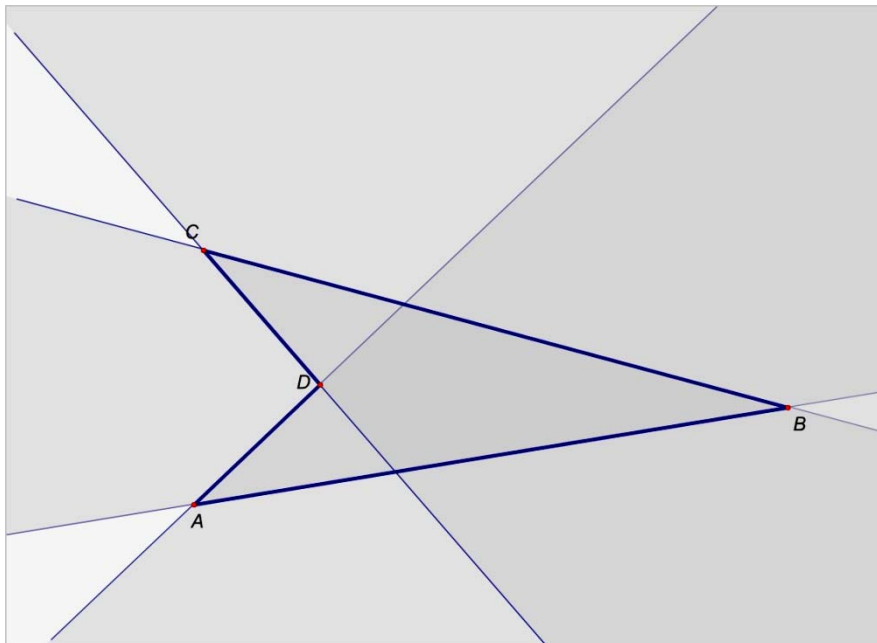
5. Definieren Sie das „Innere eines Vierecks  $ABCD$ “. Beachten Sie, dass dabei sowohl konvexe als auch nichtkonvexe Vierecke erfasst werden sollen.

LÖSUNG:

1. Versuch einer Definition (Inneres eines Vierecks):

Das Innere eines Vierecks  $\overline{ABCD}$  ist die Schnittmenge der folgenden Halbebenen:  
 $ABC^+, BCD^+, CDA^+, DAB^+$ .

Diese Definition liefert nur für konvexe Vierecke das, was wir als Inneres eines Vierecks verstehen wollen. Die folgende Abbildung wendet die Definition auf ein nicht konvexes Viereck an:



Zur Generierung der Abbildung wurden die grafischen Darstellungen der Halbebenen  $ABC^+, BCD^+, CDA^+, DAB^+$  in verschiedene aufeinanderliegende Ebenen des Grafiksystems gelegt und mit einer Transparenz von 40% ausgestattet. Das, was wir eigentlich unter dem Inneren des Vierecks  $\overline{ABCD}$  verstehen wollen, müsste jetzt einheitlich in ein und derselben Helligkeit eingefärbt sein. Wie wir sehen ist dem nicht so. Deshalb: „Teile und Herrsche!“ Wir zerlegen das Viereck in zwei Teildreiecke und vereinigen das Innere dieser beiden Teildreiecke.

**Definition** (Inneres eines Vierecks):

Unter dem Inneren eines Vierecks  $\overline{ABCD}$  versteht man die Vereinigungsmenge der beiden Punktmenge, die jeweils das Innere der folgenden beiden Dreiecke bilden:

- $\overline{ABC}$  und  $\overline{ACD}$ , falls die Punktmengen, die das jeweils Innere dieser beiden Dreiecke (ohne die Dreieckseiten) bilden, disjunkt sind,
- $\overline{ABD}$  und  $\overline{BCD}$  sonst.