

Einführung in die Geometrie: Übung 3 (Lösungen)

Aufgaben zu Definitionen

Aufgabe 3.1

Unter einer Konventionaldefinition versteht man eine Definition, die in der Form "Wenn-Dann" formuliert wurde.

Geben Sie zwei prinzipiell verschiedene Konventionaldefinitionen des Begriffs *Mittelsenkrechte* einer Strecke an.

- 1) Wenn eine Gerade g durch den Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ geht und senkrecht auf $\overline{AB}$ steht, dann ist g die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$.
- 2) Wenn g die Menge aller Punkte ist, welche jeweils von den Endpunkten der Strecke $\overline{AB}$ den gleichen Abstand haben, dann ist g die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$.
- 3) Wenn eine Punktmenge alle und nur diese Punkte enthält, die jeweils von den Endpunkten einer Strecke $\overline{AB}$ den gleichen Abstand haben, dann ist diese Punktmenge die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.

Aufgaben zu Sätzen und Beweisen

Aufgabe 3.2

- a) Ergänzen Sie so, dass sowohl die Hin- als auch die Rückrichtung wahr sind:

Wenn ein Viereck ein **Parallelogramm** ist, halbieren sich seine Diagonalen.

Wenn sich die Diagonalen eines Vierecks halbieren, so ist es ein **Parallelogramm**.

- b) Formulieren sie eine Äquivalenz.

Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich dessen Diagonalen halbieren.

- c) Definieren Sie die Vierecksart durch das gefundene Kriterium.

Ein Viereck heißt Parallelogramm, wenn sich dessen Diagonalen halbieren.

Aufgabe 3.3

Wir gehen von folgender Implikation aus: Wenn zwei Geraden g und h nicht identisch sind, dann haben sie höchstens einen Punkt gemeinsam.

- a) Wie lautet die Kontraposition dieser Implikation?

Kontraposition: Wenn zwei Geraden g und h mehr als einen Punkt gemeinsam haben, dann sind sie identisch.

- b) Wie lautet die Annahme, wenn Sie diese Implikation durch einen Widerspruch beweisen mochten?

Annahme: g und h sind nicht identisch und sie haben mehr als einen Punkt gemeinsam.

Aufgabe 3.4

Satz: In einem Dreieck $\overline{ABC}$ mit $|AC| < |BC| < |AB|$ sind die Winkel α und β nicht kongruent zueinander.

- a) Welcher Beweis ist korrekt? Begründen Sie ausführlich! (Der Basiswinkelsatz und seine Umkehrung seien bereits bewiesen.)

Beweis 1) Sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck.

Voraussetzung: $|AC| < |BC| < |AB|$.

Behauptung: $|\alpha| \neq |\beta|$

Beweis: Da nach Voraussetzung $|AC| \neq |BC|$ gilt nach dem Basiswinkelsatz $|\alpha| \neq |\beta|$. Damit ist der Satz bewiesen.

Beweis 2) Sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck.

Vor: $|AC| < |BC| < |AB|$.

Behauptung: $|\alpha| \neq |\beta|$

Beweis: Nach Umkehrung des Basiswinkelsatzes gilt: Wenn $|\alpha| = |\beta|$ dann gilt $|AC| = |BC|$. Die Kontraposition der

Umkehrung lautet also: Wenn $|AC| \neq |BC|$ dann gilt $|\alpha| \neq |\beta|$. Da die Kontraposition gleichwertig ist, kann man auch diese beweisen. Da nach Voraussetzung gilt: $|AC| < |BC|$, d.h. $|AC| \neq |BC|$, kann nach Kontraposition der Umkehrung des Basiswinkelsatzes direkt gefolgert werden: $|\alpha| \neq |\beta|$. Damit ist der Satz bewiesen.

Beweis 1) ist nicht korrekt, da die Begründung „Basiswinkelsatz“ an dieser Stelle nicht korrekt ist.

b) **Beweisen Sie den Satz indirekt mit Widerspruch.**

Annahme: $|\alpha| = |\beta| \wedge |AC| < |BC| < |AB|$

Beweisschritt	Begründung
1) $ \alpha = \beta $	Annahme
2) $\overline{AB} = \overline{AC}$	Umkehrung Basiswinkelsatz, 1)
Widerspruch zur VSS mit $ AC < BC < AB $	

Aufgabe 3.5

Das Parallelenaxiom lautet wie folgt:

Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist.

Nutzen Sie dieses Axiom, beim Lösen der folgenden Aufgabe:

Es seien a , b und c drei paarweise verschiedene Geraden in ein und derselben Ebene.

a) Beweisen Sie folgende Implikation durch einen Widerspruchsbeweis: $a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$.

VSS: $a \parallel b \wedge b \parallel c, a \neq b \neq c \neq a$

Beh: $a \parallel c$

Annahme: $\neg(a \parallel c) \wedge (a \parallel b \wedge b \parallel c) \wedge (a \neq b \neq c \neq a)$

Beweisschritt	Begründung
1) $\neg(a \parallel c)$	Annahme
2) $\exists S: S \in a \wedge S \in c$	Def. parallel
3) $a \parallel b \wedge b \parallel c$	VSS
4) $a = c$	Folgt aus 2. und Parallelenaxiom
Widerspruch zu $a \neq c$	

b) Welche Eigenschaft der Relation $\parallel$ auf der Menge aller Geraden einer Ebene haben Sie hiermit gezeigt?

Es wurde die Transitivität der Parallelenrelation gezeigt.

Aufgabe 3.6

Gegeben sei folgende Äquivalenz: Der Abstand zweier Punkte A und B ist genau dann 0, wenn A und B identisch sind.

a) Formulieren Sie die beiden Implikationen, die in dieser Aussage stecken.

1) Wenn $|AB| = 0$, dann $A = B$.

2) Wenn $A = B$, dann $|AB| = 0$.

b) Wie lautet jeweils die Kontraposition der beiden Implikationen?

1) Wenn $A \neq B$, dann $|AB| \neq 0$.

2) Wenn $|AB| \neq 0$, dann $A \neq B$.

c) Wie lauten die beiden Annahmen, wenn Sie diese Implikationen jeweils durch einen Widerspruch beweisen möchten?

1) $A \neq B$ und $|AB| = 0$

2) $|AB| \neq 0$ und $A = B$