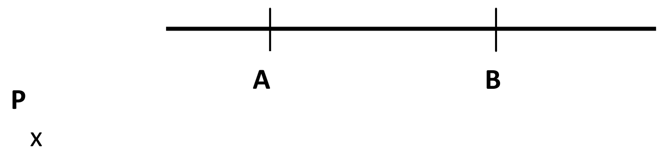
Lösung zur Modul 1-Klausur Sekundarstufe PO 2011, Teil Geometrie, SoSe 12

Aufgabe 8: Definieren

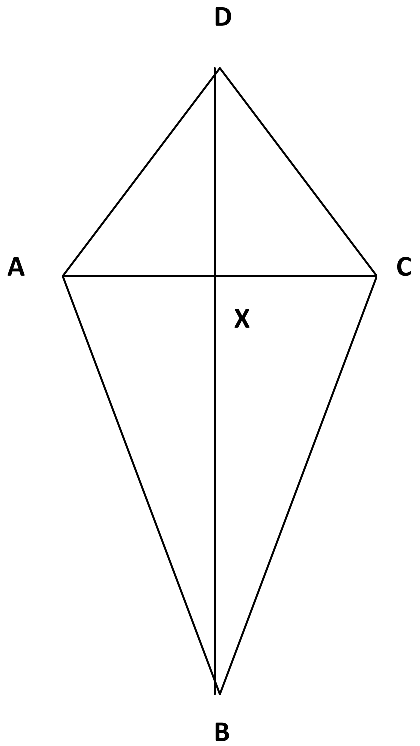
a)	Definieren Sie den Begriff *Mittelpunkt* der Strecke $\overline{AB}$. Sei $\overline{AB}$ eine Strecke und M ein Punkt. M ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$, wenn $M \in \overline{AB}$ und $\lvert AM \rvert = \lvert MB \rvert$.	2	
b)	Der Begriff Nebenwinkel sei bereits definiert. Ergänzen Sie die folgende Definition *Scheitelwinkel* mittels des Begriffs Nebenwinkel. Definition (Scheitelwinkel): Es seien α und β ein Paar von Nebenwinkeln. α und γ bilden ein Paar von *Scheitelwinkeln*, wenn… … γ Nebenwinkel von β ist und $\alpha \neq \gamma$.	2	
c)	Warum handelt es sich bei der folgenden Formulierung um keine Definition? In jeder Ebene gibt es wenigstens einen Drachen. Hier wird eine Existenzaussage getroffen („es gibt"). Existenzaussagen sind beweisbar und dürfen nicht in Definitionen vorkommen.	1	
d)	Begründen Sie mittels einer Skizze, warum die folgende Definition nicht korrekt ist: α und β heißen Scheitelwinkel $:\Leftrightarrow \lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$. 	1	
e)	Formulieren Sie eine Konventionaldefinition des Begriffs *Drachen* nur durch Verwendung des Oberbegriffs *Viereck* und der Eigenschaften der *Diagonalen* von Drachen. Definition D: Ein Drache ist ein Viereck mit aufeinander senkrecht stehenden Diagonalen, wobei eine Diagonale durch die andere halbiert wird.	3	

Aufgabe 9: Argumentieren, Begründen, Beweisen

a)	Es gelte nkoll (A, B, C). Begründen Sie nur durch Nennung eines einzigen Axioms die Gültigkeit der folgenden Implikation: $A \in gC^- \wedge B \in gC^- \Rightarrow \overline{AB} \cap g = \emptyset$. Axiom von Pasch	1	

<table>
<tr><td>b)</td><td>Es sei P ∉ g. Beweisen Sie die Eindeutigkeit des Lotes von P auf g.
Vor: P ∉ g
Beh: Lot von P auf g ist eindeutig
Ann: Es gibt zwei verschiedene Lote $\overline{PL_1}$ und $\overline{PL_2}$.
Bew:
Es entsteht das Dreieck $\overline{PL_1L_2}$ (da $L_1 \neq L_2$) mit $\sphericalangle PL_1L_2$= 90 (Definition Lot).
Wegen der Annahme gilt außerdem $\sphericalangle P,\ L_2L_1^-$= 90 (Definition Lot).
Das ist ein Widerspruch zum schwachen Außenwinkelsatz.</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Begründen Sie mittels einer Skizze, dass die Implikation
$P \notin AB^- \Rightarrow P \in AB^+$ keine wahre Aussage ist.
</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Der Begriff Drachen sei entsprechend Definition D aus Aufgabe 1 festgelegt.
Beweisen Sie: Wenn $\overline{ABCD}$ ein Drachen ist, dann gilt $\overline{AB} \cong \overline{BC} \wedge \overline{CD} \cong \overline{DA}$.
Vor: $\overline{ABCD}$ Viereck mit $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{X\}$ und $|AX| = |XC|$.
Beh: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \wedge \overline{CD} \cong \overline{DA}$
Bew:
1. Dreieck $\overline{AXD} \cong$ Dreieck $\overline{CXD}$
(SWS mit $\overline{XD} \cong \overline{XD}\ trivial, |AX| = |XC|\ und\ \sphericalangle DXA \cong \sphericalangle DXC$ nach Vor.)
$\Rightarrow \overline{CD} \cong \overline{DA}$
2. Dreieck $\overline{AXB} \cong$ Dreieck $\overline{CXB}$
(SWS mit $\overline{XB} \cong \overline{XB}\ trivial, |AX| = |XC|\ und\ \sphericalangle BXA \cong \sphericalangle BXC$ nach Vor.)
$\Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{BC}$
q.e.d.</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Es sei $\overline{ABCD}$ ein konvexes Viereck mit $\overline{AB} \cong \overline{BC} \wedge \overline{CD} \cong \overline{DA}$. Beweisen Sie: $\overline{ABCD}$ ist ein Drachen entsprechend Definition D.
Vor: $\overline{ABCD}$ konvexes Viereck mit $\overline{AB} \cong \overline{BC} \wedge \overline{CD} \cong \overline{DA}$
Beh: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{X\}$ und $|AX| = |XC|$.
Bew:
1. Dreieck $\overline{ABD} \cong$ Dreieck $\overline{CBD}$
(SSS mit $\overline{AB} \cong \overline{BC} \wedge \overline{CD} \cong \overline{DA}\ nach\ Vor.$ und $\overline{BD} \cong \overline{BD}\ trivial$)
$\Rightarrow \sphericalangle ADB \cong \sphericalangle BDC$
2. Dreieck $\overline{AXD} \cong$ Dreieck $\overline{CXD}$
(SWS mit $\overline{XD} \cong \overline{XD}\ trivial, |DA| = |CD|\ nach\ Vor. und\ \sphericalangle ADB \cong \sphericalangle BDC$ nach 1.)
$\Rightarrow |AX| = |XC|\ und\ \sphericalangle DXA \cong \sphericalangle DXC$ (also $\overline{AC} \perp \overline{BD}$)
q.e.d.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Skizze zu Aufgabe 9 d) und e)



Aufgabe 10: Beweisen wie die Schüler

Skizze und Voraussetzungen siehe Klausur

	Schritt	**Begründung**		
(1)	$\overline{MA} \cong \overline{MB} \cong \overline{MC}$	M ist Mittelpunkt von k, Vor. II	1	
(2)	$\lvert\alpha\rvert$ = 37°	Vor. I	1	
(3)	$\lvert\delta\rvert$ = 37°	(1), (2), Basiswinkelsatz	3	
(4)	$\lvert\varphi\rvert$ = 74°	(2), (3), starker Außenwinkelsatz, Vor. III	3	
(5)	$\lvert\beta\rvert + \lvert\gamma\rvert +$ 74°= 180°	(4), Innenwinkelsumme im Dreieck	2	
(6)	$\lvert\beta\rvert = \lvert\gamma\rvert$	(1), Basiswinkelsatz	2	
(7)	$\lvert\gamma\rvert$ = 53°	(5), (6)	2	
(8)	$\lvert\delta\rvert + \lvert\gamma\rvert = 90°$	(3), (7)	2	

Unter welchen Bedingungen wären die obigen Berechnungen ein korrekter Beweis für den Satz des Thales? (1 Punkt)

Wenn anstelle von $\lvert\alpha\rvert$ = 37° die Größe von α variabel wäre, also z.B. so: $\lvert\alpha\rvert$ = x mit 0<x<90°.