

Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 7 (Lösungen)

1. Zwei voneinander verschiedene Ebenen haben entweder keinen Punkt oder eine Gerade gemeinsam, auf der alle gemeinsamen Punkte beider Ebenen liegen.

Beweis:

Es seien ε_1 und ε_2 zwei Ebenen.

Fall 1: Die beiden Ebenen haben keinen Punkt gemeinsam.

Dieser Fall ist trivial.

Fall 2: Die beiden Ebenen haben einen Punkt gemeinsam.

sei $P_1 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$

Behauptungen:

1. Es existiert eine Gerade g , die beiden Ebenen angehört:

$$\exists g \in \mathcal{G} : g \subseteq \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$$

2. Es existiert kein Punkt, der im Schnitt der beiden Ebenen liegt, aber nicht zu g gehört:

$$\neg \exists P_3 \in P : P_3 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_3 \notin g$$

Beweis von Behauptung 1:

(1)	$P_1 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$	Voraussetzung Fall 2
(2)	$\exists P_2 \in P : P_2 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_2 \neq P_1$	Axiom I/6: Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie noch mindestens einen weiteren Punkt gemeinsam.
(3)	Es existiert genau eine Gerade P_1P_2 , die durch beide Punkte geht.	Axiom I/1: Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.
(4)	$P_1P_2 \subseteq \varepsilon_1$	Axiom I/5: Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene ε liegen, so liegt jeder Punkt von g in ε .
(5)	$P_1P_2 \subseteq \varepsilon_2$	Axiom I/5: Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene ε liegen, so liegt jeder Punkt von g in ε .
(6)	$P_1P_2 \subseteq \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$	Folgt aus (4) und (5)

Behauptung 1 ist damit bewiesen.

Beweis von Behauptung 2:

Klassischer Fall für einen indirekten Beweis.

Annahme:

$$\exists P_3 \in P : P_3 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_3 \notin g$$

(Zeigen wollen wir jetzt natürlich, dass doch $P_3 \in g$ gilt.)

(1)	$P_3 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_3 \notin P_1P_2$	nach Annahme, andere Schreibweise für g
(2)	ε_1 und ε_2 sind zwei verschiedene Ebenen	Voraussetzung für alle unsere Behauptungen
(3)	$P_1 \in \varepsilon_1 \wedge P_1 \in \varepsilon_2$	Punkt aus Beweis Behauptung 1
(4)	$P_2 \in \varepsilon_1 \wedge P_2 \in \varepsilon_2$	Punkt aus Beweis Behauptung 1
(5)	$nkoll(P_1, P_2, P_3)$	(1)
(6)	$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$	(1), (3), (4), (5) und Axiom I/4: Zu je drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten gibt es genau eine Ebene, die diese drei Punkte enthält.
<p>⚡ (6) ist ein Widerspruch zu ε_1 und ε_2 sind zwei verschiedene Ebenen! Die Annahme ist zu verwerfen!</p>		

2. Beweisen Sie folgenden Satz auf Grundlage der Inzidenzaxiome für den Raum (I/0–I/7):
Es existieren (mindestens) 6 paarweise verschiedene Geraden.

Beweis:

- Nach I/7 gibt es vier Punkte A, B, C und D , die nicht komplanar sind.
- Es gibt also 6 Paare verschiedener Punkte und nach I/1 wird dadurch jeweils eine Gerade bestimmt: AB, AC, AD, BC, BD, CD .
- Es bleibt zu zeigen, dass die Geraden AB, AC, AD, BC, BD und CD paarweise verschieden sind. Wir beweisen $AB \neq AC$.
- Indirekter Beweis:
 - Wäre $AB = AC$, so würde C der Geraden AB angehören.
 - Die Punkte A, B und D sind nicht kollinear, denn würden A, B und D auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so lägen sogar alle vier Punkte A, B, C und D auf dieser Geraden (weil nach Annahme $AB = AC$). Unter Hinzuziehung eines Punktes E , der nicht auf AB liegt (existiert nach I/3) wäre damit klar, dass A, B, C, D in einer Ebene liegen, was der Einführung dieser Punkte unter Berufung auf I/7 widerspricht.
 - Durch A, B und D wird nach I/4 eine Ebene ABD bestimmt.
 - Wegen I/5 und wegen $C \in AB$ gehört C zur Ebene $ABD \Rightarrow A, B, C$ und D liegen in einer Ebene \Rightarrow Widerspruch zur Einführung dieser Punkte mit I/8.
- Also ist $AB \neq AC$. Analog lässt sich zeigen $AB \neq AD, AB \neq BC$ usw.
Es gibt also 6 paarweise verschiedene Geraden.

3. Beweisen Sie: Ist O ein beliebiger Punkt einer Geraden g und A ein weiterer (von O verschiedener) Punkt dieser Geraden, so gilt für die Halbgeraden OA^+ und OA^- :
- a) $OA^+ \cap OA^- = \{O\}$ und b) $OA^+ \cup OA^- = g$.

BEWEIS:

- a) Nach Definition ist $OA^+ := \{P \mid \text{Zw}(O, A, P) \vee \text{Zw}(O, P, A)\} \cup \{O, A\}$ und $OA^- := \{P \mid \text{Zw}(P, O, A)\} \cup \{O\}$.

Damit ist offensichtlich, dass O der Schnittmenge $OA^+ \cap OA^-$ angehört und es bleibt zu zeigen, dass dies für keinen von O verschiedenen Punkt zutrifft.

Indirekter Beweis: Wir nehmen an, ein Punkt $P \neq O$ möge sowohl zu OA^+ als auch zu OA^- gehören. Dann gilt:

($\text{Zw}(OAP)$ oder $\text{Zw}(OPA)$ oder $P = A$) und $\text{Zw}(POA)$.

Von drei Punkten kann nur einer zwischen den beiden anderen liegen, was unsere Annahme für den Fall $P \neq A$ sofort zum Widerspruch führt:

weder $\text{Zw}(OAP)$ und $\text{Zw}(POA)$ ist gleichzeitig möglich, noch $\text{Zw}(OPA)$ und $\text{Zw}(POA)$.

Da für $O \neq A$ nach Definition der Zwischenrelation nicht $\text{Zw}(AOA)$ gelten kann, gehört der Punkt A nicht zu OA^- .

Es gibt also außer O keinen Punkt $P \in OA^+ \cap OA^-$ – die Behauptung a) ist somit bewiesen.

b) Es sei Q ein beliebiger (von O verschiedener) Punkt der Geraden g .

Nach Folgerung 3 liegt von den Punkten O, A und Q einer zwischen den beiden anderen oder Q ist mit A identisch.

In beiden Fällen gehört Q definitionsgemäß einer der beiden Halbgeraden OA^+ und OA^- und somit der Vereinigungsmenge $OA^+ \cup OA^-$ an.

Da Q beliebig gewählt war, ist damit auch die Behauptung b) gezeigt.

Sternchenaufgabe:

4. Beweisen Sie folgenden Satz auf Grundlage der Inzidenzaxiome für den Raum (I/0–I/7): Jede Ebene enthält wenigstens drei Punkte.

Beweis:

Mögliche Lagen der geforderten vier nicht komplanaren Punkte bezüglich der Ebene ε

Die geforderten vier nicht komplanaren Punkte bezeichnen wir mit A, B, C und D . Wenigstens einer der vier Punkte A, B, C und D gehört nicht zu ε , da sie sonst komplanar wären. Sei dieses o.B.d.A. der Punkt D .

Für die restlichen drei Punkte A, B und C sind jetzt folgende Lagen möglich:

Fall 1: A, B und C liegen in der Ebene ε .

Fall 2: Genau zwei der drei Punkte liegen in der Ebene ε (o.B.d.A. seien dies A und B).

Fall 3: Genau einer der drei Punkte liegt in ε (o.B.d.A. sei dies der Punkt A).

Fall 4: Keiner der drei Punkte liegt in der Ebene ε .

Untersuchung von Fall 1:

Nach Satz in Übungsaufgabe 6.4 sind die drei Punkte drei paarweise verschiedene Punkte der Ebene ε . Damit enthält ε drei verschiedene Punkte.

Untersuchung von Fall 2:

Mit A und B enthält ε bereits zwei verschiedene Punkte. Es bleibt nachzuweisen, dass ε einen weiteren Punkt enthält. Die Punkte B, C und D bestimmen eindeutig eine Ebene β . Diese Ebene β hat mit ε den Punkt B gemeinsam. Nach Axiom I/6 haben β und ε jetzt noch einen weiteren von B verschiedenen Punkt E gemeinsam. Dieser Punkt E ist auch verschieden von A . Würde E nämlich mit A zusammenfallen, wäre neben den Punkten B, C und D auch A ein Punkt der Ebene β . Das wäre jedoch ein Widerspruch dazu, dass A, B, C und D nicht komplanar sind.

Untersuchung von Fall 3:

Die drei Punkte B, C und D liegen außerhalb der Ebene ε . Sie bestimmen zusammen mit A eindeutig die folgenden beiden Ebenen: β , die Ebene durch A, B und D und γ , die Ebene durch A, C und D . β und γ sind nicht identisch, weil sonst die Punkte A, B, C und D komplanar wären. ε und β haben den Punkt A gemeinsam. Damit haben sie nach Axiom I/6 einen weiteren Punkt E gemeinsam. ε und γ haben den Punkt A gemeinsam. Damit haben sie nach Axiom I/6 einen weiteren Punkt F gemeinsam. Wenn wir zeigen können, dass E und F nicht identisch sind, ist der Beweis für diesen Fall geführt. Das tun wir indirekt: wir nehmen an, dass E und F identisch sind. Die Ebenen β und γ haben bei Gültigkeit dieser Annahme die folgenden Punkte gemeinsam: A, D und $E = F$. Damit sind

die beiden Ebenen nach Axiom I/4 identisch. Demzufolge würden die vier Punkte A , B , C und D in ein und derselben Ebene liegen, was ein Widerspruch zur ihrer vorausgesetzten Nichtkomplanarität ist. Die beiden Punkte E und F müssen also verschiedene Punkte von ε sein. Dass sowohl E als auch F verschieden von A war, ergab das Axiom I/6.

Untersuchung von Fall 4:

Wenn keiner der vier Punkte A , B , C und D zu ε gehört, greifen wir auf einen Punkt E aus ε zurück, der durch das Axiom I/4 (zweiter Teil) geliefert wird. Der Beweis lässt sich jetzt in analoger Weise zu Fall3 führen (jedoch mit den Punkten E , B , C und D statt A , B , C und D).

Damit ist die Behauptung für alle möglichen Fälle gezeigt.