Einführung in die Geometrie: Übungsserie 5

(Lösungen)

Aufgabe 1:
Satz: Gegeben sei ein Dreieck ABC in einer Ebene E und eine Gerade g in dieser Ebene, die keine der drei Punkte A, B und C enthält.
Wenn g die Strecke $\overline{BC}$ schneidet, so schneidet sie auch entweder die Strecke $\overline{AB}$ oder die Strecke $\overline{AC}$.

a) Wie lautet die Kontraposition dieser Implikation?
b) Wie lautet die Annahme, wenn Sie diese Implikation durch einen Widerspruch beweisen möchten?

a) Schneidet g nicht die Strecke $\overline{AB}$ **und** nicht die Strecke $\overline{AC}$, dann schneidet g auch nicht die Strecke $\overline{BC}$.
b) Annahme: g schneidet nicht $\overline{AB}$ und nicht $\overline{AC}$.

Aufgabe 2:
Gegeben sei folgende Äquivalenz: Der Abstand zweier Punkte A und B ist genau dann 0, wenn A und B identisch sind.

a) Formulieren Sie die beiden Implikationen, die in dieser Aussage stecken.
b) Wie lauten jeweils die Kontrapositionen der beiden Implikationen?
c) Wie lauten die beiden Annahmen, wenn Sie diese Implikationen jeweils durch einen Widerspruch beweisen möchten?

a) 1. Wenn der Abstand zweier Punkte A und B null ist, dann sind A und B identisch.
2. Wenn zwei Punkte A und B identisch sind, dann ist der Abstand dieser Punkte null.
b) zu 1. Sind die Punkte A und B nicht identisch, dann ist deren Abstand nicht null.
zu 2. Ist der Abstand zweier Punkte A und B nicht null, dann sind die Punkt nicht identisch.
c) zu 1. Annahme: Die Punkte A und B seien nicht identisch.
zu 2. Annahme: Der Abstand der Punkte A und B sei nicht null.

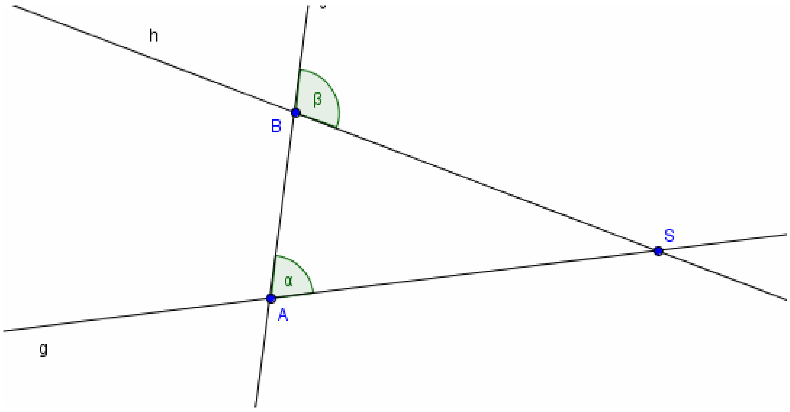
Aufgabe 3:
Der Stufenwinkelsatz lautet: Die Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.

a) Wie lautet die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes?
b) Wie lautet die Kontraposition der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes?
c) Beweisen Sie die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises.

a) Wenn Stufenwinkel an geschnittenen Geraden kongruent sind, dann sind die Geraden parallel zueinander.
b) Wenn zwei geschnittene Geraden nicht parallel zueinander sind, dann sind die Stufenwinkel an den Geraden nicht kongruent zueinander.
c) Voraussetzung: Stufenwinkel an geschnittenen Geraden sind kongruent.
Behauptung: Die Geraden sind parallel zueinander.
Beweis: Annahme: Die Geraden sind nicht parallel zueinander.

	Beweisschritt	Begründung
1.	g nicht parallel h	Annahme
2.	$g \cap h = \{S\}$	Satz I/1
3.	Es existiert ein Dreieck ABS	Drei nicht kollineare Punkte bilden ein Dreieck (siehe Skizze)
4.	$\|\beta\| > \|\alpha\|$	Schwacher Außenwinkelsatz
5.	Widerspruch	Zur Voraussetzung dass die beiden Winkel kongruent sind
6.	Annahme ist zu verwerfen	
7.	Behauptung stimmt	

Skizze:



Aufgabe 4:
Wir haben in der Vorlesung den folgenden Satz kennen gelernt:
Jede Äquivalenzrelation R auf einer Menge M erzeugt auf M eine Klasseneinteilung.
Ergänzen Sie den nachstehenden Beweis:
<u>Voraussetzung:</u>

R* sei eine Äquivalenzrelation auf *M

Konstruktion einer Zerlegung von M in eine Menge K von Teilmengen derart, dass:
a sei beliebiges Element von M. Alle Elemente b aus M zu denen a in Relation R steht gehören zur Teilmenge T_a von M.
$T_a := \{b \mid b \in M \wedge aRb\}$
Die Menge K ist die Menge aller Teilmengen vom M: $K := \{T_x \mid x \in M\}$

<u>Behauptung:</u>
K erfüllt die Eigenschaften einer Klasseneinteilung, d. h.:
1: $\{\ \} \notin K$

2: Zwei beliebige Teilmengen Ta und Tb sind entweder identisch oder disjunkt

3: $\bigcup T_i \in K = M$

Zu 1:

Nr.	Beweisschritt	Begründung
1	$\{\ \} \notin K$	Da jedes $x \in M$ zumindest mit sich selbst in Relation steht (Reflexivität)

Zu 2:

Nr.	Beweisschritt	Begründung
1	Wir betrachten: $T_a := \{c \mid c \in M \wedge aRc\}$ und $T_b := \{d \mid d \in M \wedge bRd\}$	Zwei beliebige Teilmengen *Ta* und *Tb* müssen miteinander verglichen werden
2	**Fall 1: *aRb***	
3	$T_b \subseteq T_a$	Wegen der Transitivität steht jetzt *a* zu jedem Element von *Tb* in Relation
4	$T_a \subseteq T_b$	Wegen der Transitivität und Symmetrie steht auch *b* zu jedem Element von *Ta* in Relation
5	$T_a = T_b$	3, 4 Teilmengenbeziehungen
6	**Fall 2:** $\neg(aRb)$	
7	**Annahme:** *Ta* und *Tb* seien nicht disjunkt	
8	$\Rightarrow \exists c \in M : c \in T_a \wedge c \in T_b$	Element *c* ist in beiden Teilmengen *Ta*, *Tb* enthalten
9	$\Rightarrow aRc \wedge bRc$	Nach Konstruktion der Zerlegung
10	$\Rightarrow aRc \wedge cRb$	Symmetrie der Relation
11	$\Rightarrow aRb$	Transitivität der Relation
12	**Widerspruch zu:** Voraussetzung, dass $\neg(aRb)$	

Zu 3:

Nr.	Beweisschritt	Begründung
1	$\bigcup T_i \in K = M$	Da jedes $x \in M$ zumindest mit sich selbst in Relation steht (Reflexivität), gehört jedes $x \in M$ auch einer Teilmenge *Ti* an => Vereinigung aller Teilmengen von *M* ist die Menge *M* selbst.