Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 11

(Lösungen)

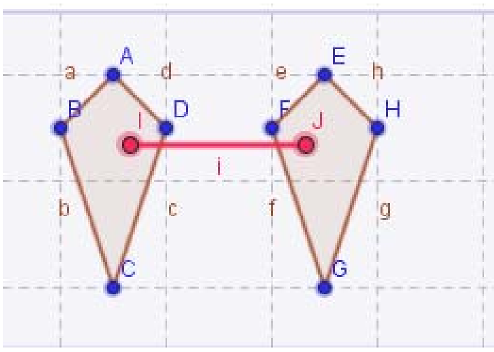
1. Definieren Sie den Begriff: „Konkave Punktmenge" ohne den Begriff „konvex" zu gebrauchen.

Eine Menge *M* heißt konkav wenn gilt: $\exists_{A,B\in M} : \overline{AB} \not\subseteq M$

2. Begründen Sie, dass der Schnitt einer offenen Halbebene *E* mit einer Halbgeraden, die zwei Punkte mit *E* gemeinsam hat, auf jeden Fall eine konvexe Punktmenge ist.

   1. offene Halbebenen sind konvex (Beweis siehe Tutorium 10)
   2. Halbgeraden sind konvex, da nach def. Halbgerade zu beliebigen zwei Punkten A und B der Halbgeraden auch die Strecke $\overline{AB}$ zur Halbgeraden gehört.
   3. Der Schnitt zweier konvexer Punktmengen ist ebenfalls konvex (Beweis siehe Übung), also auch der Schnitt einer offenen Halbebene mit einer Halbgeraden.

3. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Vereinigungsmenge des Inneren zweier Drachenvierecke, die keine Rauten sind, konkav sein kann.



4. Beweisen Sie: Das Innere eines beliebigen Dreiecks ist konvex.

Lösung:
Das Innere eines Dreiecks ist der Schnitt dreier Halbebenen. Wir wissen nach einem bekannten Satz, dass eine Halbebene eine konvexe Punktmenge ist. Wir wissen nach einem zweiten bekannten Satz, dass die Schnittmenge zweier konvexer Punktmengen ebenfalls konvex ist. Also ist auch die Schnittmenge zweier Halbebenen eine konvexe Punktmenge. Diese neue konvexe Punktmenge geschnitten mit der dritten Halbebene ist folglich wieder eine konvexe Punktmenge.

5. Definieren Sie den Begriff des Innenwinkels eines Dreiecks.

Gegeben sei ein Dreieck $\overline{ABC}$. Die Winkel $\angle AB^+AC^+$ $\angle BC^+BA^+$ und $\angle CB^+CA^+$ heißen Innenwinkel des Dreiecks $\overline{ABC}$.

6. Beweisen Sie: Wenn α und β zwei Scheitelwinkel sind, dann haben α und β dieselbe Größe.

Es sei $\alpha = \langle p^+q^+$ und damit $\beta = \langle p^-q^-$ der Scheitelwinkel von α.
Der Winkel $\gamma = \langle q^+p^-$ ist dann Nebenwinkel sowohl von α als auch von β.
Nach Axiom IV/4 gelten die folgenden beiden Gleichungen:
$|\alpha| + |\gamma| = 180,\ |\beta| + |\gamma| = 180$
Aus diesen beiden Gleichungen folgt unmittelbar $|\alpha| = |\beta|$, was letztlich zu beweisen war.