Einführung in die Geometrie: Übungsserie 3

(Lösungen)

1. Aufgabe:

Der Basiswinkelsatz lautet: Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent zueinander.

a) Wie lautet die Umkehrung des Basiswinkelsatzes?
b) Fassen Sie den Basiswinkelsatz und seine Umkehrung zu **einem** Satz zusammen (Kriterium).

a) Sind zwei Winkel in einem Dreieck kongruent zueinander, dann ist das Dreieck gleichschenklig.
b) Ein Dreieck ist genau gleichschenklig, wenn zwei Winkel kongruent sind.

2. Aufgabe:

Der Begriff *Mittelsenkrechte* sei folgendermaßen definiert:

Die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ ist die Gerade g, die durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ verläuft und zu der Geraden AB senkrecht ist.

Beweisen Sie folgenden Satz:

Die Mittelsenkrechte m einer beliebigen Strecke $\overline{AB}$ ist die Menge aller Punkte P, die von A und B denselben Abstand haben: $m = \{P \mid |AP| = |BP|\}$.

Beachten Sie, dass Sie die Gleichheit zweier Mengen nachweisen müssen (der Beweis besteht aus 2 Teilen).

<u>Beweis:</u> Es ist zu zeigen, dass die in der Definition ausgezeichnete Gerade g mit der im Satz beschriebenen Punktmenge $m = \{P \mid |AP| = |BP|\}$ identisch ist. Nach dem Prinzip der Mengengleichheit bedeutet dies: für alle Punkte P der Ebene gilt $P \in g \Leftrightarrow P \in m$, also:

1. $P \in g \Rightarrow P \in m$

Es ist also zu zeigen, dass für jeden Punkt P der Geraden g, die durch den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ verläuft und zu AB senkrecht ist, gilt: $|AP| = |BP|$.

Dazu betrachte man für einen beliebigen Punkt $P \in g$ die Dreiecke ΔAMP und ΔBMP. Beide Dreiecke sind bei M rechtwinklig, da $g \perp AB$. Außerdem ist $|AM| = |BM|$ (da M Mittelpunkt von $\overline{AB}$) und trivialerweise $|MP| = |MP|$. Nach dem Kongruenzsatz „sws“ sind ΔAMP und ΔBMP kongruent und es gilt auch $|AP| = |BP|$. Damit ist die Richtung $P \in g \Rightarrow P \in m$ nachgewiesen.

2. $P \in m \Rightarrow P \in g$

Gezeigt werden muss hier, dass alle Punkte P, für die $|AP| = |BP|$ gilt, auf der Geraden g liegen, die durch den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ verläuft und zu AB senkrecht ist.

Dazu betrachtet man für einen beliebigen Punkt P, für den $|AP| = |BP|$ gilt, die Dreiecke ΔAMP und ΔBMP. Diese sind nach dem Kongruenzsatz „sss“ kongruent.

Daraus folgt, dass die Winkel $\angle(AMP)$ und $\angle(BMP)$ kongruent sind. Da diese Nebenwinkel sind, handelt es sich um rechte Winkel. Also ist $MP \perp AB$. Da es aber nur eine zu AB senkrechte Gerade geben kann, die durch M verläuft, ist $MP = g$ und somit $P \in g$.

Durch diese beiden Schritte ist der Satz bewiesen.

3. Aufgabe:

Geben Sie das kartesische Produkt $M \times M$ der Menge $M = \{1,2,3\}$ an.

$$M \times M = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

4. Aufgabe:

Geben Sie die Kleiner-Gleich-Relation „$\leq$“ in der Menge $M = \{1,2,3\}$ als Teilmenge des kartesischen Produktes $M \times M$ an und stellen Sie diese Relation in einer Tabelle dar.

$$R_{\leq} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$$

$\leq$	1	2	3
1	x	x	x
2		x	x
3			x

5. Aufgabe:

Entscheiden Sie für die folgenden Relationen, ob es sich um reflexive, symmetrische sowie transitive Relationen handelt:

- Parallelität von Geraden der Ebene,
- Kongruenz geometrischer Figuren,
- Teilbarkeit in **N**,
- Kleinerrelation in **R**,
- Größer-Gleich-Relation in **R**,
- Ungleichheit in **R.**

Relation	reflexiv	symmetrisch	transitiv
Parallelität	ja	ja	ja
Kongruenz	ja	ja	ja
Teilbarkeit	ja	nein	ja
$<$	nein	nein	ja
$\geq$	ja	nein	ja
$\neq$	nein	ja	nein

6. Aufgabe:

Es seien eine Ebene *E* (aufgefasst als Punktmenge) und eine Gerade *g* in *E* gegeben.

Wir betrachten folgende Relation ◊ (◊ ist ein willkürlich gewähltes Symbol, um die Relation nicht mit dem unauffälligen Buchstaben *R* bezeichnen zu müssen) in der Menge $E \backslash g$ (also aller Punkte der Ebene *E*, die nicht der Geraden *g* angehören):

Für beliebige $A, B \in E\backslash g$ gilt $A \lozenge B :\Leftrightarrow \overline{AB} \cap g = \{\}$.

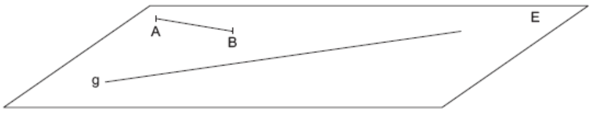
Bemerkung: Falls $A = B$, so verstehen wir unter der „Strecke“ $\overline{AB} = \overline{AA}$ einfach den Punkt *A*.

a) Beschreiben Sie die Relation ◊ verbal und veranschaulichen Sie diese Relation.

b) Begründen Sie anschaulich, dass ◊ eine Äquivalenzrelation ist. Formulieren Sie dazu die Eigenschaften von Äquivalenzrelationen konkret auf die Relation ◊ bezogen (also als Aussagen über Schnittpunkte von Strecken und Geraden.
<u>Hinweis:</u> Sie können die Transitivität noch nicht exakt beweisen; in dieser Aufgabe geht es zunächst darum, die Relationseigenschaften als geometrische Eigenschaften zu interpretieren und zu verstehen. Der Beweis der Transitivität ist erst auf Basis einer axiomatischen Fundierung der Geometrie möglich.

c) Geben Sie die Äquivalenzklassen an, in welche $\Diamond$ die Menge $E\backslash g$ zerlegt.

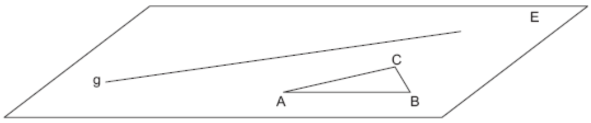
(a) Zwei Punkte A und B stehen zueinander in der Relation $\odot$, genau dann wenn ihre Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ die Gerade g nicht schneidet. Die folgende Abbildung veranschaulicht diese Relation.



(b) Um zu zeigen, dass $\odot$ eine Äquivalenzrelation ist, müssen wir zeigen, dass $\odot$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
Reflexivität: Sei P ein beliebiger Punkt der Menge $E \setminus g$. Zu zeigen gilt, dass $P \odot P$, d.h. dass $\overline{PP} \cap g = \emptyset$. Da die Strecke $\overline{PP}$ lediglich aus einem Punkt P besteht und dieser laut Voraussetzung in der Menge $E \setminus g$ liegt, gilt: $P \notin g$. Damit ist $\overline{PP} \cap g = \emptyset$, die Relation ist also reflexiv.

Symmetrie: Es seien A und B beliebige Punkte der Menge $E \setminus g$. Zu zeigen gilt: $A \odot B \Rightarrow B \odot A$. Es ist offensichtlich, dass die Strecke $\overline{BA}$ die Gerade g nicht schneidet, wenn die Strecke $\overline{AB}$ die Gerade g nicht schneidet, denn $\overline{AB}$ und $\overline{BA}$ beschreiben die gleiche Strecke.

Transitivität: Es seien A, B und C beliebige Punkte der Menge $E \setminus g$. Es gilt zu veranschaulichen, dass $A \odot B \wedge B \odot C \Rightarrow A \odot C$. Unter Berücksichtigung der definierten Relation ist also zu veranschaulichen: Wenn $\overline{AB} \cap g = \emptyset$ und $\overline{BC} \cap g = \emptyset$, dann gilt auch $\overline{AC} \cap g = \emptyset$. Oder anders ausgedrückt: Schneidet g die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ des Dreickes ABC nicht, so schneidet g auch die Seite $\overline{AC}$ nicht. Das ist anschaulich klar (siehe Abbildung), kann aber inhaltlich noch nicht bewiesen werden.



c) Die Gerade g trennt die Ebene in zwei Halbebenen. Die Menge aller Punkte einer Halbebene entsprechen einer Äquivalenzklasse.