9 Übungsaufgaben zum 22. Januar 2021

9.1 Aufgaben, zu deren Lösung nur die Mittel der neuen Theorie zugelassen sind

Aufgabe 9.1

Korollar aus dem schwachen Außenwinkelsatz

Beweisen Sie:

Satz 9.1

(Korollar aus dem schwachen Außenwinkelsatz)

Jedes Dreieck hat zwei spitze Innenwinkel.

Aufgabe 9.2

Seiten-Winkel-Beziehung

Beweisen Sie den folgenden Satz, indem Sie die Größen von α und β unmittelbar miteinander und nicht über eine Zwischengröße vergleichen (Bierkastenbeweis):

Satz 9.2

(Seiten-Winkel-Beziehung)

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen.

$$|a| < |b| \Rightarrow |\alpha| < |\beta|$$

Aufgabe 9.3

Winkel-Seiten-Beziehung

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz 9.3

(Umkehrung Seiten-Winkel-Beziehung)

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen.

$$|\alpha| < |\beta| \Rightarrow |a| < |b|$$

Aufgabe 9.4

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Definition 9.1

(Abstand eines Punktes zu einer Geraden, Variante 1)
Es seien g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt. Der Abstand von P zu g ($|Pg|$) ist das Minimum der folgenden Menge: $\{|PG| \mid G \in g\}$.

Definition 9.2

(Abstand eines Punktes zu einer Geraden, Variante 2)
Es seien g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt. Der Abstand von P zu g ($|Pg|$) ist die Länge des Lotes von P auf g.

Beweisen sie die Gleichwertigkeit beider Definitionen.

Aufgabe 9.5

Umkehrung des Stufenwinkelsatzes

Beweisen Sie:

Satz 9.4

Umkehrung des Stufenwinkelsatzes
Es seien a und b zwei Geraden die beide durch eine dritte Gerade c geschnitten werden. α und β sei ein Paar von Stufenwinkeln, die bei diesem Schnitt entstehen.

$$\alpha \cong \beta \Rightarrow a \| b$$

Aufgabe 9.6

Umkreis eines Dreiecks

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen. m_a, m_b, m_c seien die Mittelsenkrechten der Seiten von $\overline{ABC}$. Beweisen Sie:

$$m_a \cap m_b = \{M\} \rightarrow M \in m_c$$

9.2 Aufgaben, zu deren Lösung Ihr Schulwissen zugelassen ist

Aufgabe 9.7

Parallelität von Geraden

Wir setzen ebene Geometrie voraus.

Definition 9.3

Parallelität von Geraden, Variante 1
$g \| h :\Leftrightarrow \forall G_1, G_2 \in g : |G_1 h| = |G_2 h|$

Definition 9.4

Parallelität von Geraden, Variante 2
$g \| h :\Leftrightarrow g \equiv h \vee g \cap h = \emptyset$

Beweisen sie die Gleichwertigkeit beider Definitionen.

Aufgabe 9.8

Satz des Thales

Satz 9.5

(Peripheriewinkelsatz)
Peripheriewinkel über derselben Sehne sind kongruent zueinander.

Beweisen Sie unter Verwendung des Peripheriewinkelsatzes den Satz des Thales.

Aufgabe 9.9

Umkehrung des Thalessatzes

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. A, B, C seien drei paarweise verschiedene Punkte, wobei $\overline{AB}$ ein Durchmesser von k sei. Beweisen Sie:

$$C \in k \Rightarrow |\angle ACB| = 90^\circ$$

(Hinweis: Der Satz des Thales sei bewiesen, ein Widerspruchsbeweis ist jetzt hilfreich.)

Aufgabe 9.10

Umkehrung des Thalessatzes

Beweisen Sie:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist,
dann liegt der Mittelpunkt seines Umkreises auf der Hypotenuse dieses Dreiecks.