Hinweis: Auf diesem Übungsblatt finden Sie einige Beweise, die in der VL schon geführt wurden bzw. die Beweisidee angedeutet wurde. Schreiben Sie die Beweise zur Übung sauber auf.

Absolute Geometrie

Aufgabe 12.1

Man beweise: Ein Punkt P gehört genau dann zur Winkelhalbierenden des Winkels α, wenn er zu den Schenkeln von α jeweils denselben Abstand hat.

Sei < ASB ein Winkel.

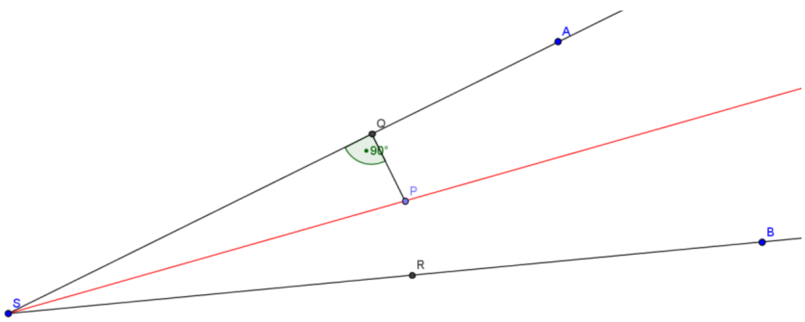
$P \in WH_{<ASB} \Leftrightarrow |QP| = |RP|$ mit $Q \in SA^+$ und $R \in SB^+$

‚=>'

Voraussetzung: $P \in WH_{<ASB}$

Behauptung: |SA,P| = |SB,P|

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	|SP| = |SP|	Trivial
2)	|<ASP| = |<PSB|	Definition WH, VSS ($P \in WH$)
3)	$\exists! Q \in SA^+$: |<SQP| = 90	Ex. und Eind. des Lotes, Axiom vom Lineal, VSS
4)	$\exists! R \in SB^+$: |SR| = |SQ|	(3), Axiom vom Lineal, VSS
5)	ΔQSP ist kongruent ΔPSR	(1), (2), (3), (4), SWS
6)	|SA,P| = |SB,P|	(5), Definition Kongruenz, (3), Abstand Punkt auf Gerade,
7)	|QP| = |RP|	(6)



‚<='

Voraussetzung: $|QP| = |RP|$ mit $Q \in SA^+$ und $R \in SB^+$

Behauptung: $P \in WH_{<ASB}$

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	|QP| = |RP|	Voraussetzung
2)	|<SQP| = |<PRS| = 90	Definition Abstand, Lot, senkrecht, Satz über rechte Winkel
3)	|SP| = |SP|	Trivial
4)	|SP| ist längste Seite im Dreieck	(2), Satz über Winkel-Seiten-Verhältnisse im Dreieck, Korollar 1
5)	ΔQSP ist kongruent ΔPSR	(1), (2), (3), (4), SsW
6)	|<QSP| = |<PSR|	(5), Definition Kongruenz
7)	$P \in WH_{<ASB}$	(6), Definition WH

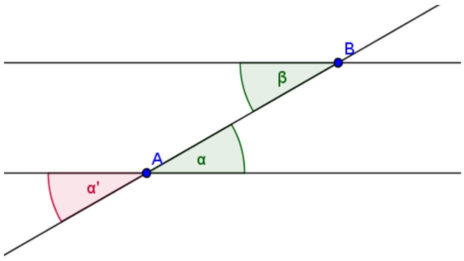
Aufgabe 12.2
Beweisen Sie die Umkehrung des Wechselwinkelsatzes

Wechselwinkelsatzkriterium: $a \parallel b \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta|$

Gilt zu zeigen: $|\alpha| = |\beta| \Rightarrow a \parallel b$

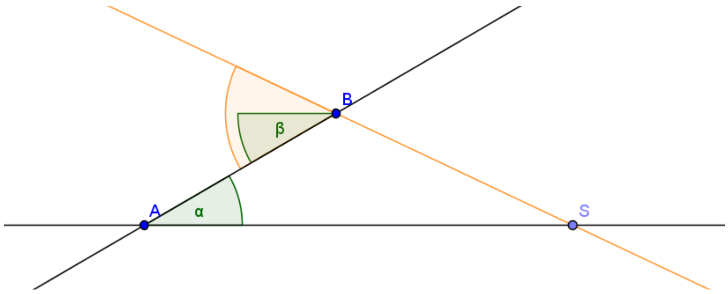
a) mithilfe der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes.

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	α und β sind Wechselwinkel; $|\alpha| = |\beta|$	VSS
2)	$|\alpha| = |\alpha'|$	Scheitelwinkelsatz
3)	$|\alpha| = |\alpha'| = |\beta|$	(1), (2), Rechnen in $\mathbb{R}$, Transitivität ‚='
4)	β und α' sind Stufenwinkel	Definition Stufenwinkel
5)	$a \parallel b$	(3), (4), Umkehrung Stufenwinkelsatz



b) ohne die Umkehrung des Stufenwinkelsatzes zu verwenden.
Wir nehmen an, a und b seien NICHT parallel.

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	Es existiert ein Punkt S: $a \cap b = \{S\}$	Definition parallel, Annahme
2)	Seien die Schnittpunkte mit der g wie folgt bezeichnet: A und B	Geschnittene Geraden – nach Voraussetzung
3)	Es existiert ein Dreieck ASB	(1), (2)
4)	o. B. d. A. $|\alpha| > |\beta|$	(3), Definition Außenwinkel, α und β sind WW, α ist Außenwinkel, schwacher Außenwinkelsatz
5)	Widerspruch zur VSS, Annahme ist zu verwerfen	(4)



Aufgabe 12.3
Beweisen Sie: Wenn P ein Punkt außerhalb der Geraden g ist, dann gibt es eine Gerade h, die durch P geht und parallel zu g ist.

Aus der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes wissen wir, dass zwei Geraden genau dann parallel sind, wenn die Stufenwinkel kongruent zueinander sind.

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	Wir fällen das Lot von P auf g. Der dabei entstehende Lotfußpunkt heiße S.	Definition Lot, VSS
2)	|< SP^{+}, g| = 90	Definition Lot, Konstruktion
3)	Durch P existiert genau eine Gerade p, die durch P verläuft und senkrecht auf SP steht.	Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten
4)	Jeder Winkel <PS^{+},p hat das Maß 90.	(3), Definition Lot und senkrecht
5)	|<SP^{+}, g| = |<PS^{+}, p| = 90 und Winkel sind Stufenwinkel	(2), (4), Definition Stufenwinkel
6)	p verläuft durch P und ist parallel zu g.	(5), Umkehrung STWS

ODER: Winkel nach beliebigen Maß ω generieren (WMA, WKA)

Aufgabe 12.4
Es sei folgende Definition für den Begriff *Parallelogramm* gegeben:

Definition 1: Ein Viereck mit zwei Paaren paralleler Seiten heißt Parallelogramm.

Beweisen Sie: Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen halbieren, dann ist das Viereck ein Parallelogramm (entsprechend Definition 1).

Sei ABCD ein beliebiges Viereck, indem sich die Diagonalen halbieren (Schnittpunkt sei S)

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	|AS| = |SC|	VSS
2)	|DS| = |SB|	VSS
3)	|<ASB| = |<DSC|	Scheitelwinkelsatz
4)	|<ASD| = |<CSB|	Scheitelwinkelsatz
5)	Δ ASB ist kongruent Δ DSC	SWS, (1), (2), (3)
6)	Δ ASD ist kongruent Δ CSB	SWS, (1), (2), (4)
7)	|AB| = |DC|	(5), Definition Kongruenz
8)	|AD| = |BC|	(6), Definition Kongruenz
9)	Δ DAB ist kongruent Δ DBC	(7), (8), |DB| = |DB| trivial, SSS
10)	|<CDB| = |<DBA| |<CDS| = |<ABS|	(9), (5), Definition Kongruenz
11)	DC ǁ AB	(10), Umkehrung Wechselwinkelsatz
12)	Δ CDA ist kongruent Δ CAB	(7), (8), |AC| = |AC| trivial, SSS
13)	|<BDA| = |<CBD| |<ADS| = |<SBC|	(12), (6), Definition Kongruenz
14)	AD ǁ BC	(13), Umkehrung Wechselwinkelsatz

Euklidische Geometrie

Aufgabe 12.5
Gegen welche Forderung, die an Axiomensysteme zu stellen ist, verstößt die folgende Formulierung des Parallelenaxioms:
Zu jedem Punkt P außerhalb einer Geraden g gibt es genau eine Gerade h, die durch P geht und zu g parallel ist.

Gegen die **Unabhängigkeit** und **Minimalität** der Axiome.

Aufgabe 12.6
Beweisen Sie den Wechselwinkelsatz, ohne den Stufenwinkelsatz zu verwenden.

Wechselwinkelsatz: $a \parallel b \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$

Annahme: $|\alpha| \neq |\beta|$, o. B. d. A. $|\alpha| > |\beta|$

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	$\|\alpha\| > \|\beta\|$	Annahme
2)	$\exists\, \alpha': \|\alpha'\| = \|\beta\|$	WMA, WKA
3)	$a' \parallel b$	(2), Umkehrung Wechselwinkelsatz
4)	$P \in a'$ und $P \in a$ und $a' \neq a$	(1), (2), Definition Winkel
5)	Da es nur eine Gerade durch P geben kann, die parallel zu b ist, ist das ein Widerspruch zur VSS – Annahme ist zu verwerfen!	VSS, (4), Euklid'sches Parallelenaxiom,

Aufgabe 12.7
Beweisen Sie den Innenwinkelsatz für Dreiecke
a) mithilfe des Stufenwinkelsatzes.
Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks ist 180.

Sei ABC ein Dreieck mit schulüblicher Bezeichnung:

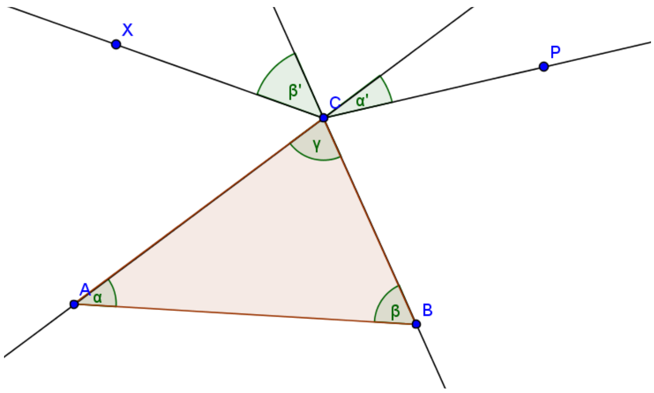
Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	Sei g eine eindeutige Gerade, die durch C verläuft und parallel zu AB ist.	Ex. von Parallelen, EP, VSS
2)	$\|\alpha\| = \|\alpha'\|$	(1), Stufenwinkelsatz
3)	$\|\beta\| = \|\beta'\|$	(1), Stufenwinkelsatz
4)	$\|\gamma\| = \|\gamma'\|$	Scheitelwinkelsatz
5)	$\|\alpha'\| + \|\gamma'\| = \|\omega\|$	(2), (4), WAA, Rechnen in $\mathbb{R}$
6)	$\|\omega\| + \|\beta'\| = 180$	(3), (5), Definition NW, Supplementaxiom, Definition supplementär
7)	$\|\alpha'\| + \|\beta'\| + \|\gamma'\| = 180$	(5), (6), Rechnen in $\mathbb{R}$
8)	$\|\alpha\| + \|\beta\| + \|\gamma\| = 180$	(2), (3), (4), (7)

b) mithilfe der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes.

geht ned! Ansonsten bräuchten wir keine Euklid'sche Geometrie, um die Innenwinkelsumme zu zeigen.

Unter Verwendung des Euklid'schen Parallelenaxiom (also euklid'sche Geometrie), geht es schon:

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	$\lvert\alpha\rvert = \lvert\alpha\rvert$	Stufenwinkel an C in AC,B^+ nach WMA und WKA
2)	$CP \parallel AB$	Umkehrung Stufenwinkelsatz, (1)
3)	$\lvert\beta\rvert = \lvert\beta'\rvert$	Stufenwinkel an C in AC,B^- nach WMA und WKA
4)	$CX \parallel AB$	Umkehrung Stufenwinkelsatz, (3)
5)	$CP \equiv CX$	Euklid'sches Parallelenaxiom
6)	… (weiterer Beweisverlauf wie bei a))	



Aufgabe 12.8
Beweisen Sie den starken Außenwinkelsatz.

Satz: Jeder Außenwinkel ist so groß, wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

Sei α ein f. a. b. Innenwinkel des Dreiecks ABC und α' ein f. a. b. Nebenwinkel von α. Ferner seien die restlichen Innenwinkel mit β und γ bezeichnet.

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	α' ist Außenwinkel zu α.	Definition Außenwinkel.
2)	$\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert + \lvert\gamma\rvert = 180$	Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck
3)	$\lvert\alpha\rvert + \lvert\alpha'\rvert = 180$	Definition Nebenwinkel, VSS
4)	$\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert + \lvert\gamma\rvert = \lvert\alpha\rvert + \lvert\alpha'\rvert$	(2), (3)
5)	$\lvert\beta\rvert + \lvert\gamma\rvert = \lvert\alpha'\rvert$	(4), Rechnen in $\mathbb{R}$

Skizze zu 12.4